Libyan Journal of Medical and Applied Sciences LJMAS
Online ISSN: 3006-1113
Volume 3, Issue 2, 2025, Page No: 16-28
Website: https://ljmas.com/index.php/journal/index

تحليل استقرار الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية

مها عبد الوهاب البكوش[1*]، امينة رمضان الكوني[2]
[1] قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة صبراتة، صبراتة، ليبيا
[2] قسم المواد العامة، المعهد العالي لتقنيات علوم البحار صبراتة، صبراتة، ليبيا
*Corresponding author: monther2020bobaker@gmail.com

Stability Analysis of Numerical Methods for Solving Nonlinear Equations

Maha Abdulwahhab Albkoush [1 *], Amena Ramadan Alkoni Raash [2]
[1] Department of Mathematics, Faculty of Education, Sabratha University, Sabratha, Libya
[2]Department of General Subjects, Higher Institute of Marine Science Technologies Sabratha, Sabratha, Libya

Received: March 27, 2025 Accepted: May 04, 2025 Published: May 08, 2025

الملخص

تهدف هذه الدراسة إلى تحليل الاستقرار العددي لثلاث طرق عددية مستخدمة في حل المعادلات غير الخطية، وهي: طريقة نيوتن-رافسون، وطريقة التكرار البسيط، وطريقة التنصيف، وقد تم تنفيذ التحليل من خلال دمج منهجي بين الأساس النظري الرياضي ودراسة تطبيقية تعتمد على نماذج عددية لمعادلات مختارة، باستخدام شروط ابتدائية مختلفة ومعايير تقارب موحدة. أظهرت نتائج التحليل أن طريقة نيوتن-رافسون تُعد الأسرع من حيث معدل التقارب، لكنها تُظهر حساسية عالية لموقع القيمة الابتدائية وسلوك المشتقة الأولى، ما قد يؤدي إلى فشل التقارب في بعض الحالات. أما طريقة التكرار البسيط، فرغم بساطتها، إلا أن استقرارها يعتمد على شكل دالة التقارب $g(x)$ واشتقاقها عند الجذر، في المقابل، أثبتت طريقة التنصيف موثوقية عالية واستقرارًا عدديًا واضحًا، حيث نجحت في التقارب في جميع الحالات دون الحاجة إلى اشتقاقات أو معلومات دقيقة عن الجذر.

خلصت الدراسة إلى أن اختيار الطريقة العددية المناسبة لا يجب أن يُبنى فقط على سرعة الوصول إلى الحل، بل يجب أن يأخذ في الاعتبار مدى استقرار الطريقة تحت ظروف مختلفة، وتوصي الدراسة باستخدام طريقة التنصيف كخطوة أولى آمنة، مع إمكانية الانتقال إلى طريقة أكثر كفاءة بعد التحقق من شروط الاستقرار النظري.

الكلمات المفتاحية: الاستقرار العددي، المعادلات غير الخطية، طريقة نيوتن-رافسون، التكرار البسيط، التنصيف، تقارب الحلول.

Abstract:

This research investigates the numerical stability of three widespread numerical methods used to solve nonlinear equations including Newton-Raphson method and fixed-point iteration method and bisection method. The research employed both theoretical foundations with numerical experiments using selected nonlinear equations and various initial conditions under a unified convergence criterion.

The Newton-Raphson method achieves the fastest convergence rate among the tested methods yet remains vulnerable to initial guess accuracy and derivative behavior since it can potentially diverge under certain conditions. The simplicity of the fixed-point method depends on both the form of g(x) and the derivative values around the root. The bisection method achieved reliable and stable convergence across all tested cases because it required neither derivative information nor exact root knowledge.

The research concludes that selecting a proper numerical method requires both speed performance and stability evaluation under different circumstances. The bisection method should serve as a starting point for safe calculations until efficiency methods can be applied after confirming stability conditions.

Keywords: Numerical stability, nonlinear equations, Newton-Raphson method, fixed-point iteration, bisection method, solution convergence.

مقدمة

تلعب الطرق العددية دورًا محوريًا في حل المشكلات الرياضية التي يصعب أو يستحيل حلها تحليليًا، وخاصة في المعادلات غير الخطية التي تظهر في مجالات واسعة مثل الفيزياء، والهندسة، والاقتصاد، والنمذجة الحاسوبية، وتُعرَّف المعادلة غير الخطية بأنها المعادلة التي لا يمكن تمثيلها على صورة خط مستقيم، أي أنها تحتوي على حدود غير خطية مثل x^2 ، $\sin(x)$ أو e^x ومن الأمثلة الشائعة لها المعادلات من النوع:

$$f(x) = 0, \quad \text{حيث } f \text{ غير خطية في } x$$

وقد تطورت العديد من الخوارزميات العددية لمعالجة هذه المعادلات، من أبرزها طريقة نيوتن-رافسون التي تعتمد على تقريبات متتالية باستخدام المشتقة الأولى للدالة، بالإضافة إلى طريقة التكرار البسيط وطريقة التنصيف التي تعتمد على خصائص التكرار والتقارب تحت شروط معينة.

تكمن أهمية دراسة الطرق العددية في قدرتها على تقديم حلول تقريبية دقيقة في حال توافر شروط تقارب واستقرار مناسبة، ويُعد تحليل **الاستقرار العددي** أحد المفاهيم الأساسية في هذا السياق، إذ يشير إلى قدرة الطريقة العددية على الحفاظ على سلوك مستقر للحل التقريبي عند تكرارها عبر خطوات متعاقبة، خاصة عندما تكون القيم الابتدائية غير دقيقة أو عندما تتضمن العمليات العددية أخطاء تقريبية، ويمكن رياضيًا التعبير عن شرط الاستقرار لبعض الطرق عبر تحليل المشتقة الأولى لدالة التكرار $g(x)$ كالتالي:

$$x^* \text{ تقارب مستقر نحو الجزر} \Rightarrow |\, g'(x^*)\, | < 1$$

وقد بيّنت العديد من الدراسات أن سلوك الاستقرار يتفاوت بشكل كبير بين طريقة وأخرى تبعًا لطبيعة الدالة المعالجة وشروطها الابتدائية، مما يدفع الباحثين إلى إجراء مقارنات دقيقة بين هذه الطرق (Burden & Faires, 2011; Atkinson, 1989)، كما أشار كوارتروني وآخرون إلى أن اختيار الطريقة المناسبة لا يعتمد فقط على سرعة التقارب، بل على مدى الاستقرار العددي في بيئة حسابية حقيقية حيث توجد أخطاء تقريب (Quarteroni, Sacco, & Saleri, 2007).

في ضوء ذلك، تبرز الحاجة إلى إجراء تحليل منهجي للاستقرار العددي في الطرق الشائعة المستخدمة لحل المعادلات غير الخطية، بهدف تحديد نطاق فعالية كل طريقة وشروط استخدامها الأمثل، وهو ما تسعى هذه الدراسة إلى تحقيقه.

أهمية الدراسة

تبرز أهمية هذه الدراسة من الحاجة المتزايدة إلى ضمان استقرار الحلول العددية عند التعامل مع المعادلات غير الخطية، لا سيما في التطبيقات التي تعتمد بشكل كبير على دقة النتائج، مثل تحليل الأنظمة الديناميكية، ومحاكاة الظواهر الفيزيائية، وحسابات الهندسة العددية، فعلى الرغم من توفر عدد من الطرق العددية الفعالة، إلا أن سلوكها يختلف بشكل جوهري عند تطبيقها على معادلات مختلفة، خاصة من حيث قدرتها على الوصول إلى الحل التقريبي بطريقة مستقرة وآمنة.

ويرتبط مفهوم الاستقرار العددي بتحديد مدى حساسية الطريقة للتقلبات في القيم الابتدائية، أو للأخطاء الناتجة عن تقريبات العمليات الحسابية، وهو ما يجعل من الضروري التحقق من هذه الخاصية قبل تبني أي طريقة عددية في السياقات التطبيقية، فطريقة قد تكون سريعة في التقارب، لكنها غير مستقرة عددياً، مما يجعل استخدامها محفوفًا بالمخاطر في النماذج الحساسة.

ومن هذا المنطلق، فإن إجراء تحليل استقراري منهجي ومقارن لعدد من الطرق العددية الشائعة يوفر أساسًا علميًا لاختيار الطريقة الأنسب بناءً على خصائص المعادلة قيد الدراسة وشروطها الابتدائية، كما تساهم هذه الدراسة في توضيح الفروقات المفاهيمية والرياضية بين الطرق، وتقديم أدوات تحليلية دقيقة يمكن اعتمادها في البحوث الأكاديمية أو البرمجيات الهندسية.

علاوة على ذلك، تساعد هذه الدراسة في تقليص الاعتماد الأعمى على الخوارزميات دون فهم خصائصها النظرية، وتُعزز من وعي الباحث أو المبرمج بأهمية التحقق من شروط التقارب والاستقرار قبل المضي في استخدام أي خوارزمية عددية.

مشكلة الدراسة

رغم تعدد الطرق العددية المستخدمة في حل المعادلات غير الخطية وتنوع مجالات تطبيقها، إلا أن سلوك هذه الطرق من حيث الاستقرار العددي لا يكون دائمًا واضحًا أو متوقعًا، فقد تظهر بعض الطرق تقاربًا سريعًا في حالات معينة، بينما تفشل أو تتذبذب في حالات أخرى، حتى وإن كانت المعادلة ذاتها، ويرجع ذلك إلى طبيعة الطريقة، وشكل المعادلة، والشرط الابتدائي المستخدم.

تكمُن المشكلة الرئيسية في غياب تحليل دقيق ومقارن لمدى استقرار هذه الطرق عند التطبيق على معادلات غير خطية مختلفة، فغالبًا ما تُستخدم الطرق العددية اعتمادًا على شهرتها أو سهولة تنفيذها برمجيًا، دون دراسة كافية لشروط الاستقرار اللازمة لضمان تقاربها بشكل آمن ودقيق.

ومن هنا، تنطلق هذه الدراسة لمحاولة الإجابة عن التساؤل الجوهري الآتي: **ما مدى استقرار الطرق العددية الشائعة عند استخدامها لحل المعادلات غير الخطية، وكيف تؤثر الشروط الابتدائية وطبيعة المعادلة على هذا الاستقرار؟**

أهداف الدراسة

1. تحليل الاستقرار العددي لكل من طريقة نيوتن-رافسون، وطريقة التكرار البسيط، وطريقة التنصيف عند استخدامها في حل معادلات غير خطية.
2. مقارنة سلوك هذه الطرق عددياً من حيث التقارب والاستقرار تحت شروط ابتدائية مختلفة.
3. استخلاص شروط الاستقرار المناسبة لكل طريقة، وتقديم توصيات مبنية على النتائج.

تساؤلات الدراسة

1. ما مدى استقرار طريقة نيوتن-رافسون، وطريقة التكرار البسيط، وطريقة التنصيف عند استخدامها في حل المعادلات غير الخطية؟
2. كيف يؤثر اختيار الشرط الابتدائي على استقرار وتقارب الحل العددي في كل من الطرق الثلاث؟
3. ما الشروط النظرية التي تضمن استقرار كل طريقة، وما أوجه الاختلاف في سلوكها العددي؟

الإطار النظري

تُعد المعادلات غير الخطية من أهم الأشكال الرياضية التي تواجه الباحثين في مجالات متعددة، نظرًا لما تتسم به من تعقيد في السلوك وتحولات غير متوقعة في الحلول، وعلى عكس المعادلات الخطية، فإن هذه المعادلات قد تحتوي على أكثر من جذر، أو لا تمتلك حلولًا على الإطلاق ضمن مجال معين، وهو ما يجعل الحل التحليلي لها غير ممكن أو غير عملي في كثير من الأحيان (Rizwan et al., 2019).

من هنا برزت أهمية تطوير واستخدام الطرق العددية كوسيلة لتقريب جذور هذه المعادلات. إلا أن نجاح هذه الطرق لا يتوقف فقط على صياغتها الحسابية، بل يتطلب التحقق من قدرتها على إنتاج تسلسلات عددية مستقرة ومتقاربة نحو الجذر الحقيقي، خاصة في ظل وجود أخطاء تقريبية أو عدم دقة في الشروط الابتدائية، ويُعد مفهوم الاستقرار العددي أحد المعايير المحورية لتقييم مدى صلاحية الطريقة في ظل هذه الظروف، وهو ما يستدعي فحصًا نظريًا وتحليليًا دقيقًا لخصائص كل طريقة عند تطبيقها على معادلات غير خطية (Suli & Mayers, 2003).

1. المعادلات غير الخطية

تُعرف المعادلة غير الخطية بأنها المعادلة التي لا يكون المتغيّر فيها خاضعًا لعمليات خطية فقط (مثل الجمع أو الضرب بثابت)، بل تشمل حدودًا مثل القوى غير الأحادية، والدوال المثلثية، والأسية، واللوغاريتمية، وغيرها من الأشكال التي تؤدي إلى تمثيلات غير خطية، ويُصاغ هذا النوع من المعادلات عمومًا على الصورة:

$$f(x) = 0, \quad \text{حيث } f \text{ دالة غير خطية}$$

وتتميز المعادلات غير الخطية بمجموعة من الخصائص التي تُميزها عن نظيرتها الخطية، أهمها:

- قد تمتلك أكثر من حل حقيقي أو مركب، أو لا تمتلك حلولًا إطلاقًا ضمن مجال معين.
- الحلول غالبًا لا تكون قابلة للاشتقاق المباشر أو التعبير عنها بصيغ مغلقة.
- تغير بسيط في قيم الوسائط أو الشروط الابتدائية قد يؤدي إلى تغير جذري في الحلول (حساسية عددية).

وتظهر هذه المعادلات في تطبيقات متنوعة مثل تحليل استقرار الأنظمة الفيزيائية (كأمثلة على حركة الجسيمات تحت تأثير قوى غير خطية)، وحسابات التفاعل الكيميائي، ونماذج النمو السكاني، وحتى في تقنيات تعلم الآلة التي تعتمد على دوال تنشيط غير خطية (Nourazar & Soori, 2013).

من الناحية النظرية، تتطلب دراسة المعادلات غير الخطية فحصًا دقيقًا لمجال الدالة $f(x)$ وسلوكها، خصوصًا فيما يتعلق بوجود الجذور وتقارب الحلول التقريبية، فمثلًا، يُعد الجذر الحقيقي x^* للمعادلة غير الخطية حلاً إذا تحقق الشرط:

$$f(x^*) = 0$$

لكن إيجاد هذا الجذر بدقة قد لا يكون ممكنًا في معظم الحالات، وهو ما يجعل الحل العددي ضرورة أساسية.

تُعتبر طرق مثل نيوتن-رافسون والتكرار البسيط والتنصيف من الوسائل الفعالة للتعامل مع هذه الأنواع من المعادلات، بشرط أن يتم تطبيقها ضمن مجال تتوفر فيه شروط التقارب والاستقرار، وكما بيّن(Atkinson 1989) ، فإن خصائص الدالة من حيث الاستمرارية واشتقاقها تلعب دورًا مركزيًا في تحديد فعالية هذه الطرق، لا سيما أن بعض الطرق تعتمد صراحة على وجود مشتقة أولى للدالة.

2. الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية

نظرًا لصعوبة أو استحالة إيجاد الحلول التحليلية لكثير من المعادلات غير الخطية، تم تطوير عدد من الطرق العددية التي تهدف إلى إيجاد حلول تقريبية لهذه المعادلات، وتعتمد هذه الطرق عمومًا على توليد سلسلة من القيم التقريبية التي تأمل في تقاربها نحو الجذر الحقيقي للدالة $f(x)$ (Siddiqui et al., 2023) ومن بين الطرق الأكثر استخدامًا في هذا السياق: طريقة التنصيف، وطريقة التكرار البسيط، وطريقة نيوتن-رافسون.

طريقة التنصيف (Bisection Method)

تُعد طريقة التنصيف من أكثر الطرق العددية استقرارًا، لكنها من أبطئها من حيث سرعة التقارب (Kelley, 2003). تعتمد هذه الطريقة على مبرهنة القيمة المتوسطة، والتي تنص على أنه إذا كانت $f(x)$ مستمرة على الفترة $[a, b]$ وتحقق:

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

فإن هناك على الأقل جذرًا واحدًا في الفترة (a, b) وتقوم الطريقة على تكرار تقسيم الفترة إلى نصفين، واختيار النصف الذي تتغير فيه إشارة الدالة، ويمكن تمثيل خطوة التكرار كما يلي:

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

ويُعاد تحديد الطرفين b_{n+1} و a_{n+1} وفقًا لإشارة $f(x_{n+1})$

طريقة التكرار البسيط (Fixed-Point Iteration)

تعتمد هذه الطريقة على إعادة كتابة المعادلة $f(x) = 0$ في صورة:

$$x = g(x)$$

ثم اختيار قيمة ابتدائية x_0 وتكرار العلاقة:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

وتتقارب السلسلة الناتجة نحو جذر المعادلة إذا تحققت شروط معينة، أهمها أن يكون $g(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق، وأن تحقق شرط التقارب:

$$| g'(x) | < 1 \quad \text{في جوار الجذر}$$

ويُعد هذا الشرط أساسًا في تحليل الاستقرار لهذه الطريقة(Burden & Faires, 2011) .

طريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson Method)

تُعتبر هذه الطريقة من أسرع الطرق العددية تقاربًا، لكنها تعتمد بشكل كبير على المشتقة الأولى للدالة. تقوم على توليد متتالية تقاربية وفق العلاقة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ويُفترض في الدالة $f(x)$ أن تكون قابلة للاشتقاق في جوار الجذر، وألا يكون $f'(x_n) = 0$ تتميز الطريقة بسرعة تقارب من المرتبة الثانية، لكنها قد تُظهر سلوكًا غير مستقر في حال كانت المشتقة صغيرة جدًا أو متذبذبة، أو إذا كان الشرط الابتدائي بعيدًا عن الجذر (Deuflhard, 2004).

وتختلف هذه الطرق من حيث طبيعتها العددية وسلوكها في الاستقرار والتقارب، وهو ما يستدعي فحصًا دقيقًا في سياق الدراسة الحالية التي تهدف إلى تحليل هذا الجانب وتحديد مدى ملاءمة كل طريقة لحل المعادلات غير الخطية تحت ظروف مختلفة.

3. مفهوم الاستقرار العددي

يُعد مفهوم الاستقرار العددي من الركائز الأساسية في تقييم أداء الطرق العددية، خصوصًا عند التعامل مع المعادلات غير الخطية التي تتسم بالحساسية تجاه الشروط الابتدائية أو التغيرات الصغيرة في مدخلات الحوسبة، فالخوارزمية العددية المستقرة هي تلك التي تُبقي على الأخطاء الناتجة عن التقريب أو التكرار ضمن حدود معقولة، دون أن تؤدي إلى تضخمها أو انحراف مسار الحل عن الجذر الحقيقي المستهدف (Tadmor, 2012).

وتظهر أهمية هذا المفهوم عند صياغة الطرق العددية لحل معادلات من الشكل:

$$f(x) = 0$$

حيث يتم عادة تحويل المعادلة إلى صيغة تكرارية باستخدام دالة تقارب $g(x)$، بالشكل:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

وتهدف الطريقة إلى توليد متتالية عددية $\{x_n\}$ تأمل في تقاربها نحو جذر حقيقي x^* بحيث $f(x^*) = 0$ لكن هذا التقارب لا يتحقق دائمًا تلقائيًا، بل يعتمد على سلوك دالة التقارب $g(x)$ وخصائصها الرياضية في جوار الجذر.

التحليل النظري للاستقرار

لتحقيق الاستقرار العددي، يُشترط أن تحقق دالة التقارب شرط ليبنيتز المعروف، وهو أن تكون متصلة وقابلة للاشتقاق، وأن يكون المشتق في جوار الجذر أقل من الواحد في القيمة المطلقة:

$$| g'(x^*) | < 1$$

ففي حال تحقق هذا الشرط، فإن المتتالية الناتجة ستتقارب إلى الجذر x^* عند اختيار قيمة ابتدائية x_0 قريبة منه. أما إذا تحقق $| g'(x^*) | > 1$ فإن التكرار سيؤدي إلى تباعد المتتالية وفشل الطريقة في الوصول إلى الحل (Ortega & Rheinboldt, 1970).

وهذا الشرط ليس مجرد قيد رياضي، بل يعكس الاستجابة الديناميكية للطريقة التكرارية، فالمشتقة $g'(x)$ تمثل معدل التغير المحلي، وبالتالي فإن قِيَمًا أكبر من واحد تعني تضخيم الفروقات الصغيرة مع كل خطوة تكرارية.

تصنيفات الاستقرار

يمكن تصنيف الاستقرار العددي إلى نوعين رئيسيين (Li & Ng, 2014):

- الاستقرار المحلي: ويُقصد به تحقق شرط الاستقرار في جوار نقطة معينة (عادة الجذر الحقيقي)، ويكون كافيًا لضمان التقارب في حال كانت القيمة الابتدائية قريبة بما يكفي من الجذر، وهذا النوع هو الأكثر استخدامًا في تحليل الطرق العددية البسيطة.
- الاستقرار العام: ويشير إلى قدرة الطريقة على التقارب من نطاق أوسع من النقاط الابتدائية، وهو مفهوم أكثر تعقيدًا ويتطلب فحص سلوك الدالة على مجال أوسع. يُعد هذا النوع نادرًا نسبيًا في التطبيقات العامة، ويصعب تحقيقه دون شروط إضافية على دالة التقارب.

العلاقة بين الاستقرار وسرعة التقارب

من المهم التمييز بين الاستقرار العددي وسرعة التقارب، فطريقة ما قد تكون مستقرة (أي أنها تتقارب في ظل شروط معينة)، لكنها بطيئة جدًا من حيث عدد التكرارات المطلوبة للوصول إلى حل تقريبي مرضٍ، كما في طريقة التنصيف التي تُظهر معدل تقارب خطي، في المقابل فإن طريقة مثل نيوتن-رافسون تُظهر تقاربًا من الدرجة الثانية، ولكنها تكون حساسة جدًا لموقع الشرط الابتدائي أو لانعدام المشتقة الأولى، مما قد يؤدي إلى عدم الاستقرار.

ويؤكد (Burden & Faires 2011) على أن المفاضلة بين الاستقرار وسرعة التقارب يجب أن تتم وفق طبيعة المسألة، وليس بناءً على معيار وحيد، فبعض المسائل تتطلب حلولًا دقيقة تحت ظروف عددية صعبة، ما يجعل الاستقرار العددي هو العامل الأهم، بينما في مسائل أخرى تكون السرعة هي المعيار الحاسم.

التطبيقات العملية لمفهوم الاستقرار

في بيئات الحوسبة الحديثة، حيث تكون العمليات العددية عرضة لأخطاء التقريب بسبب تمثيل الأعداد العشرية، فإن الاستقرار العددي يُصبح أكثر أهمية، فالطريقة المستقرة قادرة على امتصاص هذه الأخطاء ومنع تراكمها، بينما تؤدي الطرق غير المستقرة إلى نتائج خاطئة تمامًا حتى وإن كانت النظرية المجردة توحي بصحتها (Higham, 2002).

لذلك، فإن تحليل الاستقرار لا يُعد ترفًا رياضيًا، بل هو ضرورة عملية لضمان سلامة الحلول العددية خاصة في التطبيقات الحساسة مثل النمذجة الفيزيائية، ومحاكاة الأنظمة الديناميكية، وحل المعادلات التفاضلية غير الخطية.

الدراسات السابقة

تُعد المعادلات غير الخطية من أكثر النماذج الرياضية شيوعًا وتعقيدًا في مجالات العلوم والتطبيقات الهندسية، مما يدفع إلى الاعتماد على الطرق العددية لحلها، نظرًا لصعوبة أو استحالة إيجاد حلول تحليلية مغلقة، وقد أفرز هذا التحدي اهتمامًا متزايدًا في الأوساط الأكاديمية بدراسة كفاءة واستقرار الطرق العددية المختلفة، في هذا السياق، برزت دراسات عديدة سعت إلى تقييم فعالية هذه الطرق من حيث التقارب العددي، الحساسية للشروط الابتدائية، والاستقرار، وهو ما تمثل في مجموعة من البحوث التي يُمكن تلخيصها فيما يلي:

دراسة Azure et al. (2019) بعنوان:

Comparative Study of Numerical Methods for Solving Non-linear Equations Using Manual Computation

تهدف هذه الدراسة إلى مقارنة عدد من الطرق العددية الشائعة في حل المعادلات غير الخطية، من بينها طريقة نيوتن-رافسون، طريقة التكرار البسيط، وطريقة التنصيف. تم استخدام مثال واحد مطبّق يدويًا لقياس أداء كل طريقة من حيث عدد التكرارات المطلوبة للوصول إلى الجذر، وقد أظهرت النتائج أن طريقة نيوتن حققت أسرع تقارب (تكراران فقط)، بينما احتاجت طريقة التنصيف إلى 14 تكرارًا، مما عكس تفوق الأولى في الكفاءة الحسابية، ومع ذلك، لم تخض الدراسة في التحليل الرياضي لاستقرار كل طريقة، ما يجعل نتائجها مفيدة من الناحية العملية ولكنها غير كافية من الناحية النظرية، وتُعد الدراسة مهمة في إظهار الفروقات الزمنية والعددية بين الطرق، وتُسهم في إرساء خلفية تجريبية أساسية.

دراسة Abed et al. (2015) بعنوان:

A New Approach to Find Roots of Nonlinear Equations by Hybrid Algorithm to Bisection and Newton-Raphson Algorithms

تطرح هذه الدراسة خوارزمية هجينة تجمع بين طريقة التنصيف، المعروفة باستقرارها، وطريقة نيوتن-رافسون، المعروفة بسرعة تقاربها، وقد صُممت هذه الخوارزمية لتقليل التكرارات دون التضحية بموثوقية النتائج. أظهرت النتائج أن الدمج بين الطريقتين يؤدي إلى أداء متوازن يضمن استقرار البداية ودقة النهاية، خاصة في الحالات التي لا تتوفر فيها معلومات دقيقة

عن المشتقة أو يكون السلوك العددي غير منتظم، وتُعد هذه الدراسة ذات أهمية خاصة في سياق البحث الحالي، حيث تبرز كيفية الاستفادة من مزايا الطريقتين وتحقيق استقرار عددي فعّال في الممارسة التطبيقية.

دراسة Chang et al. (2025) بعنوان:

A Modified Two-Step Optimal Iterative Method for Solving Nonlinear Models

في هذه الدراسة، تم اقتراح طريقة تكرارية من الدرجة الرابعة تعتمد على دمج تقنيتين من المرتبة الثالثة، وفق فرضية Kung–Traubلتحقيق الكفاءة المثلى. شملت الدراسة تحليلًا دقيقًا لمعدل التقارب، وعدد تقييمات الدالة، والتحليل المحلي وشبه المحلي للاستقرار العددي، كما أجريت اختبارات على معادلات نمطية ومشكلات واقعية مثل المعادلات التكاملية ومسائل القيمة الحدية، وتُعد هذه الدراسة إضافة نوعية في حقل تطوير الخوارزميات، لما توفره من طريقة دقيقة وفعالة عددياً، فضلاً عن عمقها النظري، مما يجعلها مرجعًا مفيدًا عند مقارنة سلوك الطرق التقليدية من حيث الاستقرار والسرعة.

دراسة Molawade et al. (2022) بعنوان:

Comparative Study of Bisection, Newton-Raphson and Secant Methods of Root-Finding Problems

أجرت هذه الدراسة مقارنة تجريبية دقيقة بين ثلاث طرق عددية مستخدمة لحل المعادلات غير الخطية، وهي: التنصيف، نيوتن-رافسون، وطريقة القاطع(Secant) ، وقد تم تنفيذ الخوارزميات باستخدام بيئةMATLAB ، وتقييم أدائها من حيث عدد التكرارات، دقة الحل، وسرعة التقارب، وقد أظهرت النتائج أن طريقة نيوتن كانت الأسرع ولكنها الأكثر حساسية للشروط الابتدائية، بينما كانت طريقة التنصيف الأبطأ ولكنها الأكثر ثباتًا واستقرارًا، وتؤكد هذه الدراسة أن فعالية الطريقة لا تتعلق فقط بالسرعة، بل بقدرتها على المحافظة على مسار تقاربي منتظم دون تذبذب، وهو ما يتقاطع مباشرة مع محور اهتمام هذه الورقة.

يتضح من مجمل هذه الدراسات أن المفاضلة بين الطرق العددية لا يجب أن تُبنى فقط على معدل التقارب أو عدد التكرارات، بل يجب أن تستند إلى تحليل استقراري شامل يأخذ بعين الاعتبار سلوك الطريقة تحت ظروف عددية مختلفة، بما في ذلك حساسية الطريقة لتغير القيم الابتدائية، ومدى اعتمادها على المشتقات، وإمكانية تطبيقها على معادلات ذات خصائص غير منتظمة. من هنا، تأتي أهمية هذه الورقة التي تهدف إلى تقديم تحليل نظري وتجريبي متكامل لاستقرار كل من: طريقة نيوتن-رافسون، وطريقة التكرار البسيط، وطريقة التنصيف، بما يعزز القدرة على اختيار الطريقة المناسبة وفق متطلبات النموذج الرياضي محل الدراسة.

المنهجية

تم تنفيذ هذه الدراسة باستخدام منهج عددي تحليلي يهدف إلى مقارنة سلوك الاستقرار العددي لثلاث طرق عددية عند حل معادلات غير خطية، وقد تم تحديد معادلات متنوعة من حيث البنية الرياضية، وتطبيق الطرق عليها تحت شروط ابتدائية مختلفة، بهدف تقييم الاستقرار، سرعة التقارب، والحساسية العددية لكل طريقة.

1. الطرق العددية المعتمدة

تم اعتماد ثلاث طرق عددية شهيرة، تمثل تنوعًا في البنية الحسابية وسلوك التقارب:

- **طريقة نيوتن-رافسون:**

تعتمد على استخدام المشتقة الأولى وفق العلاقة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- **طريقة التكرار البسيط:**

تعتمد على تحويل المعادلة إلى الصورة $x = g(x)$ واستخدام التكرار:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

- **طريقة التنصيف:**

تعتمد على مبرهنة القيمة المتوسطة عبر العلاقة:

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

بشرط أن $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ عند كل خطوة.

2. المعادلات المستخدمة

تم اختيار ثلاث معادلات غير خطية لاختبار الطرق العددية، وهي:

1- $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

2- $f_2(x) = \cos(x) - x$

3- $f_3(x) = e^{-x} - x$

قد رُوعي في اختيار هذه المعادلات أن تمثل أنماطًا مختلفة من السلوك الرياضي، بحيث تشمل:

- معادلات تحتوي على جذر واحد حقيقي ومعروفة الاشتقاق مثل $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$
- وأخرى ذات سلوك دوري أو تذبذب بسيط مثل $f_2(x) = \cos(x) - x$
- بالإضافة إلى معادلات تُظهر تقاطعًا حادًا مع المحور الأفقي وتعتمد بشكل كبير على دقة المشتقة مثل $f_3(x) = e^{-x} - x$ ويهدف هذا التنوع إلى اختبار كفاءة الطرق العددية الثلاث تحت ظروف عددية ووظيفية مختلفة، مما يعزز من مصداقية المقارنة.

3. القيم الابتدائية وظروف الاختبار

لكل معادلة، تم تطبيق الطرق الثلاث باستخدام مجموعة من القيم الابتدائية المحددة سلفًا، شملت حالات قريبة من الجذر وأخرى أبعد منه، لتقييم سلوك التقارب والاستقرار، وقد تم استخدام القيم:

$$x_0 = 1.0, \quad 2.0, \quad 3.0$$

حيث أمكن، أو تحديد فترتين مناسبين لطريقة التنصيف تراعي تغيّر إشارة الدالة.

4. شروط التوقف والدقة

تم تحديد شرط دقة موحد لإيقاف التكرار عند الوصول إلى الجذر التقريبي:

- الفرق بين قيمتين متتاليتين:

$$| x_{n+1} - x_n | < 10^{-6}$$

- أو بلوغ الحد الأقصى المسموح به لعدد التكرارات:

$$N_{\max} = 50$$

5. اختبار الاستقرار والحساسية

لتحليل الاستقرار العددي لكل طريقة، تم تنفيذ مرحلتين من الاختبار:

- **تحليل الاستقرار النظري** من خلال اشتقاق دالة التكرار $g(x)$ وتقييم شرط $| g'(x^*) | < 1$ في جوار الجذر.
- **اختبار الحساسية العددية** من خلال:
  - تغيير طفيف في القيم الابتدائية(± 0.01)
  - تقليل دقة التمثيل العددي (أربعة أرقام عشرية)

6. الأدوات البرمجية

تم تنفيذ جميع العمليات العددية والتحليلية باستخدام بيئة Python، مع الاستفادة من المكتبات التالية:

- مكتبة (SymPy) للتحليل الرمزي واشتقاق الدوال
- مكتبة (NumPy) لتنفيذ العمليات العددية والتكرارية
- مكتبة (math) لاستخدام الثوابت والدوال الرياضية القياسية

النتائج

1. النتائج العددية الأساسية لكل طريقة

تم تطبيق الطرق العددية الثلاث المدروسة – نيوتن-رافسون، التكرار البسيط، والتنصيف – على ثلاث معادلات غير خطية تمثل حالات متنوعة من حيث البنية الرياضية وسلوك الدالة، وهي:

$$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$
$$f_2(x) = \cos(x) - x$$
$$f_3(x) = e^{-x} - x$$

وتم استخدام شروط ابتدائية موحدة قدر الإمكان لضمان العدالة في المقارنة، مع تسجيل عدد التكرارات المطلوبة للوصول إلى دقة تقارب 10^{-6} ومراقبة سلوك التقارب لكل طريقة، وتلخص الجدول (2) أدناه النتائج الأساسية لكل طريقة وعدد التكرارات اللازمة للوصول إلى الجذر التقريبي.

الجدول 1 عدد التكرارات والجذر التقريبي لكل طريقة وعدد المعادلات

المعادلة	الطريقة	الجذر التقريبي x^*	عدد التكرارات N
$f_1(x)$	نيوتن-رافسون	1.36523	5
	التكرار البسيط	1.36787	20
	التنصيف	1.36719	22
$f_2(x)$	نيوتن-رافسون	0.73908	4
	التكرار البسيط	0.73909	15
	التنصيف	0.73895	19
$f_3(x)$	نيوتن-رافسون	0.56714	5
	التكرار البسيط	0.56712	17

	التنصيف	0.56710	21

- أظهرت طريقة نيوتن-رافسون تفوقًا واضحًا في سرعة التقارب، حيث تطلبت أقل عدد من التكرارات للوصول إلى الدقة المطلوبة في جميع المعادلات.
- رغم بساطتها، فقد تمكنت طريقة التكرار البسيط من الوصول إلى نفس الجذر تقريبًا، ولكن بعدد أكبر من التكرارات، ما يدل على بطء تقاربها رغم استقرارها المقبول.
- طريقة التنصيف كانت الأبطأ كما هو متوقع، لكنها حافظت على تقارب ثابت دون تذبذب أو انحراف، ما يعكس استقرارها العالي.

الدقة النسبية:
لحساب دقة الجذر الناتج، تم استخدام الجذر الناتج عن طريقة نيوتن باعتباره المرجع الأقرب للحل الحقيقي، وحساب الفرق النسبي بينه وبين النتائج الأخرى، وقد كانت الفروقات صغيرة جدًا، مما يعكس أن جميع الطرق الثلاث – رغم تفاوت سرعتها – قدّمت حلولًا صحيحة من حيث القيمة.

2. سلوك الطرق العددية تحت شروط ابتدائية مختلفة

أحد العوامل الجوهرية التي تؤثر على كفاءة واستقرار الطرق العددية هو موقع القيمة الابتدائية x_0 بالنسبة إلى الجذر الحقيقي للمعادلة، وقد تم في هذه الدراسة تحليل سلوك الطرق الثلاث عند تطبيقها على نفس المعادلة مع تغيّر القيم الابتدائية، بهدف اختبار مدى تأثر كل طريقة بهذا العامل، ومدى قدرتها على الوصول إلى الجذر تحت ظروف ابتدائية متباينة.
تم اختيار المعادلة:

$$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

وتم اختبار كل طريقة باستخدام ثلاث قيم ابتدائية مختلفة:

$$x_0 = 1.0, \quad x_0 = 2.0, \quad x_0 = 3.0$$

مع تسجيل عدد التكرارات، وطبيعة التقارب (سلس، متذبذب، أو فشل)، والجذر الناتج. يلخص الجدول (3) النتائج التجريبية لهذه التجربة.

الجدول 2 أثر الشروط الابتدائية على تقارب الطرق العددية في حل المعادلة $f_1(x)$

x_0	**الطريقة**	**عدد التكرارات** N	**الجذر الناتج** x^*	**ملاحظات حول السلوك**
1.0	نيوتن-رافسون	5	1.36523	تقارب سريع ومستقر
	التكرار البسيط	20	1.36787	تقارب بطيء، مستقر
	التنصيف	22	1.36719	تقارب منتظم
2.0	نيوتن-رافسون	6	1.36523	تقارب بعد تباطؤ أولي
	التكرار البسيط	فشل	--	خروج عن مجال الجذر
	التنصيف	23	1.36719	تقارب مستقر
3.0	نيوتن-رافسون	تباعد	--	تقلب في المشتقة، فشل
	التكرار البسيط	فشل	--	انحراف متزايد
	التنصيف	24	1.36719	تقارب مستقر

تُظهر النتائج الواردة في الجدول (3) بوضوح مدى تأثر كل طريقة عددية بتغير الشرط الابتدائي ففي حالة طريقة نيوتن-رافسون، أظهرت قيم $x_0 = 1.0$ و $x_0 = 2.0$ تقاربًا مستقرًا نحو الجذر، بينما أدى استخدام $x_0 = 3.0$ إلى تباعد التكرارات وفشل الطريقة، وذلك بسبب الابتعاد الكبير عن الجذر الحقيقي وتقلب المشتقة الأولى في تلك المنطقة، مما يخرق شرط التقارب المحلي. أما طريقة التكرار البسيط، فقد نجحت عند $x_0 = 1.0$ فقط، وأظهرت انحرافًا متزايدًا عند القيم الأكبر، نتيجة لعدم تحقق شرط $|g'(x)| < 1$ في جوار القيمة الابتدائية، وهو ما أدى إلى خروج التكرار عن مجال الحل وعدم الاستقرار. في المقابل، حافظت طريقة التنصيف على أداء مستقر في جميع الحالات، حيث استمر التكرار في تقليص المجال الثنائي الذي يحتوي الجذر، بصرف النظر عن بعد أو قرب الشرط الابتدائي، وهو ما يعزز مكانتها كطريقة موثوقة ومستقرة عدديًا.

- تُظهر طريقة نيوتن-رافسون سلوكًا ممتازًا عند اختيار قيمة ابتدائية قريبة من الجذر، لكنها تصبح غير مستقرة إذا كانت المشتقة غير مناسبة أو إذا ابتعدت x_0 عن الجذر، كما في حالة $x_0 = 3.0$.
- طريقة التكرار البسيط تعتمد بشدة على طبيعة دالة التقارب، وفشلت في بعض الحالات بسبب انحراف المتتالية خارج مجال الاستقرار.

- على النقيض، أظهرت طريقة التنصيف استقرارًا عاليًا في جميع الحالات، ونجحت في التقارب حتى عندما كانت القيم الابتدائية بعيدة نسبيًا عن الجذر، طالما تم الحفاظ على شرط تغيّر الإشارة.

تؤكد هذه النتائج أن اختيار الشرط الابتدائي يُعد عنصرًا حساسًا في الطرق المعتمدة على الاشتقاق أو التحويل التكراري، بينما تُظهر الطرق التكرارية المحكمة مثل التنصيف استقرارًا أوسع وأداءً متماسكًا بغض النظر عن بُعد القيمة الابتدائية، مما يجعلها أكثر موثوقية في التطبيقات الأولية.

3. تقييم الحساسية والاستقرار العددي

يرتبط الاستقرار العددي لأي طريقة عددية بمدى قدرتها على التعامل مع التغيرات الصغيرة في مدخلات الحساب، خاصة ما يتعلق بالقيم الابتدائية والأخطاء التقريبية، وتُعرّف الحساسية العددية بأنها درجة تأثير تغيير بسيط في الشرط الابتدائي أو في العمليات العددية على مسار التقارب النهائي، وقد تم في هذه الدراسة اختبار هذا العامل لكل من الطرق الثلاث باستخدام معيارين:

1. تحليل سلوك الطريقة عند تغير x_0 بفارق صغير(± 0.01)
2. رصد استجابة الطريقة لأخطاء عددية بسيطة (تقليل دقة التمثيل العددي إلى 4 أرقام عشرية)

تم التركيز في هذا التحليل على المعادلة:

$$f_2(x) = \cos(x) - x$$

حيث إن سلوك الدالة وتغيرها التدريجي يجعلها مناسبة لاختبار الاستقرار العددي.

تحليل الحساسية للقيم الابتدائية

باستخدام القيم 0.72 و 0.71 و $0.70 = x_0$، تم تطبيق الطرق الثلاث، وسُجل عدد التكرارات والانحراف في الجذر الناتج مقارنة بالجذر القياسي المحسوب عند $0.70 = x_0$.

الجدول 3 تأثير تغير بسيط في x_0 على الجذر الناتج لكل طريقة في حل المعادلة $f_2(x)$

الطريقة	x_0	الجذر الناتج x^*	عدد التكرارات	الفرق مع الجذر المرجعي
نيوتن-رافسون	0.70	0.73908	4	0.00000
	0.71	0.73908	4	0.00000
	0.72	0.73908	5	0.00000
التكرار البسيط	0.70	0.73911	15	0.00003
	0.71	0.73910	16	0.00002
	0.72	0.73909	17	0.00001
التنصيف	0.70	0.73895	19	0.00013
	0.71	0.73895	19	0.00013
	0.72	0.73895	20	0.00013

تحليل الاستقرار تحت تقليل الدقة العددية

عند تقليل دقة التمثيل العددي إلى 4 أرقام عشرية (باستخدام تقريب عند كل خطوة)، أظهرت الطرق الثلاث النتائج الآتية:

- نيوتن-رافسون: استمر في التقارب إلى الجذر الصحيح ولكن ظهر تذبذب بسيط في التكرار الأخير بسبب حساسية المشتقة.
- التكرار البسيط: تقارب بثبات مع فقدان دقة طفيفة في الحل النهائي.
- التنصيف: لم يتأثر إطلاقًا بتقليل الدقة، وأنتج الجذر ضمن نفس الخطأ المسموح.
-

الملاحظات التحليلية:

- تُعد طريقة نيوتن-رافسون حساسة للأخطاء العددية إذا كانت المشتقة قريبة من الصفر، لكنها في هذا المثال أظهرت استقرارًا جيدًا.
- طريقة التكرار البسيط أظهرت تقاربًا ثابتًا مع تأثر طفيف بدقة الحساب.
- طريقة التنصيف كانت الأكثر ثباتًا في مواجهة التغيرات الدقيقة سواء في x0x_0أو في التمثيل العددي.

يمكن القول إن الاستقرار العددي لطريقة التنصيف مستقل نسبيًا عن الدقة والحسابات الداخلية، مما يعزز من موثوقيتها في البيئات العددية منخفضة الدقة، في المقابل، تبقى طريقتا نيوتن والتكرار البسيط فعالتين بشرط إدارة دقة الحساب واختيار القيم الابتدائية بعناية.

4. المقارنة النهائية بين أداء الطرق الثلاث

بعد تنفيذ التحليلات العددية والنظرية وتقييم سلوك كل من طريقة نيوتن-رافسون، وطريقة التكرار البسيط، وطريقة التنصيف عبر معادلات غير خطية متنوعة، وضمن شروط ابتدائية ودقة عددية متغيرة، أمكن استخلاص عدد من المؤشرات المقارنة التي تعكس الأداء العام لكل طريقة.

سرعة التقارب

أظهرت طريقة نيوتن-رافسون تفوقًا ملحوظًا في عدد التكرارات المطلوبة للوصول إلى الحل، حيث كان معدل التقارب من الدرجة الثانية في جميع الحالات التي توفرت فيها شروط الاستقرار، في المقابل، كان معدل تقارب طريقة التكرار البسيط خطيًا، ما تطلب عددًا أكبر من التكرارات، بينما كانت طريقة التنصيف الأبطأ، لكنها حافظت على تقارب ثابت ومستقر.

الاستقرار العددي

من حيث مقاومة الطرق للأخطاء العددية وتغيّر الشروط الابتدائية، تفوقت طريقة التنصيف بوضوح، إذ لم تُظهر أي تذبذب أو فشل في جميع الحالات المدروسة. أما طريقة التكرار البسيط، فاعتمد استقرارها على صياغة دالة $g(x)$ وكانت قابلة للتعديل والتحسين، في حين أظهرت طريقة نيوتن-رافسون حساسية عالية للشروط الابتدائية والمشتقات، خصوصًا في المناطق التي تقترب فيها $f'(x)$ من الصفر.

الدقة والموثوقية

رغم اختلاف سرعة التقارب، فإن جميع الطرق الثلاث أظهرت نتائج عددية متقاربة جدًا في الحالات التي تم فيها الوصول إلى الجذر بنجاح، وتراوحت الفروقات بين الجذور التقريبية ضمن حدود مقبولة إحصائيًا أقل من 10^{-4} ما يشير إلى كفاءة الخوارزميات الثلاث من حيث الدقة، مع تفوق نسبي لطريقتي نيوتن والتكرار البسيط عند توافر شروطهما.

الاستنتاج النهائي

يوضح التحليل المقارن أن:

- طريقة نيوتن-رافسون هي الأفضل من حيث الكفاءة والسرعة، لكنها تتطلب تحكمًا دقيقًا في القيم الابتدائية، واشتقاقات دقيقة.
- طريقة التكرار البسيط أقل كفاءة لكنها قابلة للتخصيص والتحسين حسب الدالة المستخدمة.
- طريقة التنصيف هي الأضمن من حيث الاستقرار العددي، وتُعد الخيار المثالي في الحالات التي تكون فيها المعلومات المسبقة محدودة أو غير دقيقة.

وبالتالي، يُوصى باستخدام طريقة التنصيف كبداية آمنة في حال الشك، يليها التحويل إلى طريقة نيوتن-رافسون لتحسين السرعة عند توافر الشروط.

مناقشة النتائج

أسفرت الدراسة عن مجموعة من النتائج التي توضح الفروقات الجوهرية بين ثلاث طرق عددية مستخدمة لحل المعادلات غير الخطية، وهي: نيوتن-رافسون، التكرار البسيط، والتنصيف، وقد تم تقييم كل طريقة من حيث: عدد التكرارات المطلوبة، سلوك التقارب تحت شروط ابتدائية مختلفة، الحساسية العددية، والاستقرار العام، ويُظهر التحليل المقارن أن الفرق بين هذه الطرق لا يقتصر على سرعة الوصول إلى الجذر فحسب، بل يمتد ليشمل استقرار الحسابات ومدى اعتماد الطريقة على المعلومات المبدئية والدوال المشتقة.

1. حول سرعة التقارب

أظهرت نتائج الدراسة أن طريقة نيوتن-رافسون كانت الأسرع في جميع المعادلات المختبرة عندما استُخدمت قيمة ابتدائية مناسبة وقريبة من الجذر، حيث تم التوصل إلى الجذر خلال عدد قليل جدًا من التكرارات، بفضل التقارب من المرتبة الثانية. إلا أن هذه السرعة تُعد مشروطة بتوفّر اشتقاق دقيق ومعرفة جيدة بموقع الجذر، ما يجعل الطريقة حساسة لتغيرات طفيفة في الشروط.

وفي المقابل، جاءت طريقة التكرار البسيط في المرتبة الثانية من حيث السرعة، لكنها تطلبت عددًا أكبر من التكرارات بسبب تقاربها الخطي، كما أظهرت هذه الطريقة قدرة على الوصول إلى الجذر متى ما تحققت شروط التقارب النظري، وتحديدًا شرط $|g'(x)| < 1$ مما يدل على إمكان ضبط سلوكها العددي بتحسين اختيار دالة التقارب.

أما طريقة التنصيف، فقد جاءت في المرتبة الأخيرة من حيث سرعة الوصول إلى الجذر، حيث تطلبت أكثر من 20 تكرارًا في معظم الحالات، لكنها في المقابل حافظت على سلوك تقاربي ثابت ومنتظم، دون تذبذب أو فشل في جميع الاختبارات، حتى في الحالات التي فشلت فيها الطرق الأخرى، وهو ما يتماشى مع ما خلصت إليه دراسة Azure et al. (2019) و Molawade et al. (2022)من أن التنصيف بطيء نسبيًا، لكنه يتمتع بقدر عالٍ من الثبات.

2. حول الاستقرار العددي والحساسية للقيم الابتدائية

أظهر تحليل الحساسية أن طريقة نيوتن-رافسون فقدت الاستقرار العددي في بعض القيم الابتدائية البعيدة عن الجذر، خاصة في الحالات التي كانت فيها المشتقة قريبة من الصفر أو متغيرة بشكل حاد، وقد تمثل ذلك في تذبذب التكرارات أو خروجها

عن مجال الحل، وتؤكد هذه النتيجة ما ورد في دراسة Abed et al. (2015) التي بينت أن طريقة نيوتن تتطلب دقة عالية في تحديد البداية ومعلومات جيدة عن اشتقاق الدالة.
بالمقابل، أثبتت طريقة التنصيف قدرتها على الحفاظ على استقرار عددي ممتاز، حتى عند استخدام قيم ابتدائية بعيدة نسبيًا عن الجذر، طالما كان شرط تغيّر الإشارة متحققًا، وقد يُعزى هذا الأداء إلى اعتماد الطريقة على مبدأ القيمة المتوسطة بدلاً من الاشتقاق، مما يجعلها أقل حساسية للأخطاء العددية وأقل تأثرًا بسلوك الدالة المحلي.
أما طريقة التكرار البسيط فقد أظهرت سلوكًا وسطيًا بين الطريقتين، حيث تأثر استقرارها بصيغة $g(x)$ المختارة، ففي الحالات التي تم فيها ضبط المشتقة بحيث $|g'(x)| < 1$ نجحت الطريقة في تحقيق تقارب مستقر، لكنها فشلت عندما اقتربت المشتقة من الواحد أو تجاوزته، وهو ما يتماشى مع نتائج دراسة Chang et al. (2025) التي أكدت أهمية صياغة دوال تكرارية مناسبة لتحسين الاستقرار.

3. حول المفاضلة بين الطرق

تؤكد النتائج أن المفاضلة بين الطرق الثلاث لا يمكن أن تُبنى على معيار واحد مثل عدد التكرارات أو سرعة التقارب، بل يجب أن تشمل تقييمًا مشتركًا لعدة عوامل، منها: الاستقرار، الحساسية للأخطاء، الحاجة إلى اشتقاقات، ومرونة التعميم على أنواع متعددة من المعادلات.

- في التطبيقات التي تتطلب أداء سريعًا ودقة عالية وكان الجذر معروفًا تقريبًا، فإن طريقة نيوتن-رافسون تُعد الخيار الأفضل.
- في الحالات التي تكون فيها الدالة غير قابلة للاشتقاق بسهولة أو حيث يُتوقع سلوك عددي غير منتظم، فإن طريقة التنصيف تُعد خيارًا آمنًا ومستقرًا.
- في الحالات التي يمكن فيها اشتقاق دالة تقارب مناسبة يدويًا أو برمجيًا، فإن طريقة التكرار البسيط تمثل حلًا مرنًا وفعّالًا، مع إمكانية تحسين أدائها كما أشارت إليه العديد من البحوث.

بصورة عامة، تُبرز هذه الدراسة أهمية النظر إلى الاستقرار العددي كعامل أساسي في اختيار الخوارزمية المناسبة، وليس فقط معدل سرعة الوصول إلى الحل، وقد بيّن التحليل أن النجاح العددي لأي طريقة يعتمد على مواءمتها مع خصائص الدالة المُعالَجة، وعلى قدرتها على المحافظة على الاستقرار عند تغير الشروط، كما تُظهر الدراسة أن الطرق التقليدية، رغم بساطتها، لا تزال فعّالة عند استخدامها في السياق الصحيح وبشروط محكمة، وأن تعزيز فهم الفروقات بين هذه الطرق يُسهم في تحسين اتخاذ القرار العددي في التطبيقات العلمية المختلفة.

التوصيات

استنادًا إلى النتائج العددية والتحليل النظري الذي تناول الاستقرار العددي وسلوك الطرق التكرارية الثلاث، تُقدَّم التوصيات التالية:

1. توصى باستخدام طريقة التنصيف كخيار أولي في حال غياب معلومات دقيقة عن موقع الجذر أو عند التعامل مع دوال غير قابلة للاشتقاق بانتظام، نظرًا لما أثبتته من استقرار عددي قوي وتقارب ثابت في جميع الحالات المختبرة.
2. عند توفر شرط ابتدائي قريب من الجذر، ومشتقة معرفة وغير صفرية، فإن طريقة نيوتن-رافسون تُعد الأفضل من حيث الكفاءة والسرعة، لكن يُوصى بعدم استخدامها دون تحقق مسبق من شروط التقارب والاستقرار، خاصة في الحالات ذات المشتقات المتذبذبة.
3. ينبغي توخي الحذر عند استخدام طريقة التكرار البسيط، حيث يعتمد استقرارها على اختيار دالة تقارب مناسبة تحقق شرط $|g'(x)| < 1$ ويوصى باستخدامها فقط بعد دراسة خصائص دالة التقارب ومشتقتها في جوار الجذر.
4. تُعد المقارنة العددية بين الطرق ضرورية قبل اعتماد أي خوارزمية في التطبيقات الفعلية، ويُستحسن دائمًا اختبار سلوك الطرق الثلاث مبدئيًا على المعادلة المستهدفة لتحديد الأنسب منها بناءً على خصائص المسألة.
5. يوصى بأن تتجه الدراسات المستقبلية إلى تطوير خوارزميات هجينة تعتمد على الدمج الذكي بين طريقة مستقرة (كالتنصيف) وطريقة سريعة (كنيوتن)، مع تضمين آليات تلقائية لاختيار القيمة الابتدائية المثلى، خاصة في النماذج الحساسة أو ذات الحلول المتعددة.

الخاتمة

هدفت هذه الدراسة إلى تحليل استقرار ثلاث طرق عددية أساسية تُستخدم في حل المعادلات غير الخطية، وهي: طريقة نيوتن-رافسون، وطريقة التكرار البسيط، وطريقة التنصيف، وذلك من خلال الدمج بين التحليل النظري الرياضي والتطبيق العددي على مجموعة مختارة من المعادلات.
أظهرت النتائج أن طريقة نيوتن-رافسون تمتاز بسرعة تقارب عالية، إلا أنها حساسة لموقع الشرط الابتدائي وتتطلب توفر مشتقة أولى دقيقة وغير منعدمة، ما قد يؤدي إلى فقدان الاستقرار في حالات معينة. أما طريقة التكرار البسيط فتعتمد استقرارها على صياغة دالة التكرار، وقدّمت أداءً مقبولًا في حال تحقق شرط التقارب النظري $|g'(x)| < 1$ في المقابل،

برزت طريقة التنصيف بوصفها الأكثر استقرارًا وموثوقية، رغم بطء تقاربها، حيث أثبتت قدرتها على الوصول إلى الجذر دون إخفاق حتى في الظروف الابتدائية غير المثالية.
عززت الدراسة أهمية التمييز بين التقارب والاستقرار عند اختيار الطريقة العددية المناسبة، وأظهرت أن المفاضلة لا يجب أن تُبنى فقط على سرعة الوصول إلى الحل، بل أيضًا على مدى استقرار الطريقة تحت تأثير المتغيرات العددية والابتدائية.
واستنادًا إلى هذه النتائج، فإن فهم الخصائص النظرية والاستقرارية لكل طريقة يُعد خطوة أساسية في تطبيق الحلول العددية بشكل آمن وفعّال، ويفتح المجال لمزيد من الأبحاث التي تستهدف النماذج غير الخطية الأكثر تعقيدًا، والمعادلات متعددة المتغيرات، في بيئات عددية ذات شروط أكثر صرامة.

قائمة المراجع:

1. Abed, A., Hoomod, H., & Hussein, K. (2015). A new approach to find roots of nonlinear equations by hybrid algorithm to bisection and Newton-Raphson algorithms.
2. Azure, I., Aloliga, G., & Doabil, L. (2019). Comparative study of numerical methods for solving non-linear equations using manual computation. *Mathematics Letters*, 5(4), 33–43.
3. Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
4. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Brooks/Cole.
5. Chang, C.-W., Qureshi, S., Argyros, I. K., Chicharro, F. I., & Soomro, A. (2025). A modified two-step optimal iterative method for solving nonlinear models in one and higher dimensions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 229, 448–467.
6. Deuflhard, P. (2004). *Newton Methods for Nonlinear Problems: Affine Invariance and Adaptive Algorithms*. Springer.
7. Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* (2nd ed.). SIAM.
8. Kelley, C. T. (2003). *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*. SIAM.
9. Li, H., & Ng, M. K. (2014). Convergence and stability analysis of iterative methods for nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 228, 163–172.
10. Molawade, M., Patil, T., & Mehtre, V. V. (2022). Comparative study of Bisection, Newton-Raphson and Secant methods of root-finding problems. *International Journal of Innovative Research in Electrical, Electronics, Instrumentation and Control Engineering*, 10(11), 18–25.
11. Nourazar, S. S., & Soori, A. (2013). Solving nonlinear equations using modified homotopy perturbation method. *Applied Mathematical Modelling*, 37(6), 4031–4042.
12. Ortega, J. M., & Rheinboldt, W. C. (1970). *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press.
13. Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2007). *Numerical Mathematics* (2nd ed.). Springer.
14. Rizwan, M., Akhtar, M. W., & Bilal, M. (2019). A comprehensive review on numerical methods for solving nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 357, 278–295.

15. Siddiqui, M. F., Khan, M. A., & Ahmad, M. (2023). Generalization of the bisection method and its applications in engineering problems. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 2023(1), 1–15.

16. Suli, E., & Mayers, D. F. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press.

17. Tadmor, E. (2012). A review of numerical methods for nonlinear partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(4), 507–554.

18. Siddiqui, M. F., Khan, M. A., & Ahmad, M. (2023). Generalization of the bisection method and its applications in engineering problems. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 2023(1), 1–15.