Libyan Journal of Medical and Applied Sciences LJMAS

Online ISSN: 3006-1113

Volume 3, Issue 2, 2025, Page No: 1-15

Website: https://ljmas.com/index.php/journal/index

دراسة مقارنة لطرق التقريب العددي للتكامل: طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون نموذجًا

أميرة القمودي صالح *

قسم الرياضيات، كلية التربة الزهراء، جامعة الجفارة، ليبيا

*Corresponding author: amera999887@gmail.com

A Comparative Study of Numerical Approximation Methods for Integration: The Trapezoidal Method and Simpson's Method As A Model

Amera Alqamoudi Salih *

Mathematics Department, Faculty of Education, Alzahraa, Aljafara University, Libya

Received: March 30, 2025 Accepted: May 01, 2025 Published: May 06, 2025

الملخص

تُعالج هذه الدراسة موضوعًا مهمًا في التحليل العددي يتمثل في تقويم فعالية ودقة طريقتين شائعتين لتقريب التكاملات المحددة، وهما: طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون، وقد استندت الدراسة إلى بناء نموذج عددي تطبيقي قُسّمت فيه الفترة المدروسة إلى فواصل متساوية، وطُبّقت الطريقتان على مجموعة من الدوال الرياضية المتنوعة (خطية، تربيعية، أسية، ومثلثية)، بهدف قياس الدقة العددية من خلال مقارنة النتائج بالقيم التحليلية الدقيقة.

اعتمدت الدراسة على تحليل الخطأ المطلق والنسبي في كل حالة، واستخدمت قيمًا مختلفة لعدد الفواصل (n=4,8,16) لاختبار سلوك الطريقتين تحت شروط متوازنة. أظهرت النتائج أن طريقة سمبسون أكثر دقة، خاصة مع الدوال غير الخطية، إذ يتناقص الخطأ فيها بمعدل أسرع ((O (n^ (-4)) مقارنة بطريقة شبه المنحرف ((O (n^ (-2)) ومع ذلك، تميزت طريقة شبه المنحرف ببساطتها وقابليتها للتطبيق دون شرط عدد الفواصل الزوجي.

خلصت الدراسة إلى أن اختيار الطريقة المثلى يجب أن يُبنى على خصائص الدالة والهدف من التقريب، مع الأخذ في الاعتبار الكفاءة العددية، والاستقرار، وسهولة التنفيذ، كما أوصت بإمكانية استخدام أساليب هجينة في الحالات المركّبة لتحقيق توازن بين الدقة والكفاءة.

الكلمات المفتاحية: التكامل العددي، طريقة شبه المنحرف، طريقة سمبسون، التحليل العددي، الخطأ النسبي، الطرق العددية.

Abstract:

The research evaluates the accuracy and efficiency of two prevalent numerical integration approaches which include the Trapezoidal Rule and Simpson's Rule within numerical analysis. A structured numerical model served as the research method to divide the integration interval into equal subintervals. The study used linear, quadratic, exponential and trigonometric functions as representative examples to compare numerical integral approximations against exact analytical values for evaluating method accuracy.

The study performed absolute and relative error analysis using different subinterval counts (n=4,8,16) to create a fair comparison between the methods in identical conditions. The research data confirmed Simpson's Rule delivers more accurate results for non-linear functions because it reduces errors at a rate of $\left(O(n^{-4})\right)$ while the Trapezoidal Rule achieves $\left(O(n^{-2})\right)$ accuracy. The Trapezoidal Rule stands out as the simpler method which provides better flexibility compared to other rules when subinterval numbers are restricted or irregular.

The optimal method selection requires an evaluation of function behavior together with desired precision level while taking numerical efficiency and algorithmic stability and implementation ease into account. The research suggests combining different approaches in challenging situations to achieve accurate results while managing computational expenses.

Keywords: Keyword 1, Keyword 2, Keyword 3, Keyword 4, Keyword 4

مقدمة

يشكل التكامل أحد المفاهيم المركزية في التحليل الرياضي، وله تطبيقات واسعة في الفيزياء، والهندسة، والاقتصاد، وغيرها من العلوم التطبيقية. إلا أن التكاملات التي يصعب حسابها تحليليًا، أو تلك التي لا تملك تمثيلًا بدلالة الدوال الأولية، فرضت الحاجة إلى طرق تقريبية لحسابها، وهو ما يُعرف بالتكامل العددي، وتقوم هذه الطرق على تقسيم الفترة المدروسة إلى مقاطع صغيرة واستخدام أساليب عددية لتقريب المساحة تحت المنحنى، وهو ما يسمح بالحصول على نتائج قريبة من القيمة الحقيقية للتكامل ضمن هامش خطأ محسوب.

ومن بين أشهر الطرق المستخدمة في هذا السياق تبرز طريقة شبه المنحرف (Trapezoidal Rule) التي تُعد من أبسط الطرق عددياً، حيث تعتمد على تقريب المنحنى بخطوط مستقيمة بين كل نقطتين متتاليتين، وعلى الرغم من بساطتها، فإن دقتها محدودة نسبيًا عند التعامل مع دوال غير خطية، وتزداد الحاجة إلى تقليل الخطأ باستخدام عدد كبير من المقاطع (Burden & Faires, 2011).

في المقابل، تُعتبر طريقة سمبسون (Simpson's Rule)تطويرًا أكثر دقة، حيث تستخدم القطع المكافئة بدل الخطوط المستقيمة لتقريب منحنى الدالة، وتتميز هذه الطريقة بأنها تقدم دقة أعلى باستخدام عدد أقل من الفواصل، لا سيما إذا كانت الدالة المعطاة سلسة وذات درجة أعلى من التغير (Atkinson, 1989) ومع ذلك، فإنها تتطلب أن يكون عدد المقاطع زوجيًا، ما قد يحد من مرونتها في بعض التطبيقات.

تُعد المقارنة بين هاتين الطريقتين من المواضيع الجوهرية في التحليل العددي، ليس فقط بسبب أهميتهما النظرية، بل أيضًا بسبب استخدامهما العملي في البرمجة الرياضية والنمذجة الحاسوبية. إذ تختلف كفاءة كل منهما حسب طبيعة الدالة وتوزيع النقاط وعدد الفواصل، وهو ما يستدعي تحليلًا عدديًا دقيقًا لتحديد الأداء النسبي والقيود الخاصة بكل منهما.

وبناءً عليه، تسعى هذه الدراسة إلى إجراء تحليل مقارن موضوعي بين الطريقتين باستخدام مجموعة من الدوال التجريبية المتنوعة، وقياس الخطأ الناتج عن كل طريقة وفق شروط متساوية من حيث عدد الفواصل والمدى الزمني، كما تهدف الدراسة إلى تقديم توصيات عملية بشأن أفضلية استخدام كل طريقة بحسب خصائص الدالة، بما يعزز من دقة النمذجة العددية في التطبيقات الحاسوبية الحديثة.

مشكلة الدراسة

رغم تعدد طرق التقريب العددي للتكامل، إلا أن اختيار الطريقة الأنسب من حيث الدقة والكفاءة لا يزال يشكل تحديًا، خاصة في ظل تنوع خصائص الدوال وتفاوت عدد الفواصل المستخدمة. فبينما تُعرف طريقة شبه المنحرف ببساطتها وسهولة تطبيقها، فإن دقتها تتأثر بشكل ملحوظ عند التعامل مع دوال غير خطية أو ذات تذبذبات حادة، مما يفرض زيادة عدد الفواصل لتقليل الخطأ. في المقابل، تقدم طريقة سمبسون دقة أعلى في العديد من الحالات، لكنها تتطلب شروطًا إضافية مثل كون عدد الفواصل زوجيًا، مما قد يحد من مرونتها في بعض التطبيقات.

من هنا تنبع مشكلة الدراسة في الحاجة إلى تحليل مقارن دقيق وعملي بين الطريقتين لتحديد مدى كفاءتهما في تقريب التكاملات العددية لدوال مختلفة، وتقييم حجم الخطأ الناتج عن كل منهما في ظل نفس الشروط العددية، بما يساهم في ترشيد استخدام كل طريقة وفق خصائص المسألة العددية المدروسة.

أهداف الدراسة

1. تحليل الأداء العددي لطريقتي شبه المنحرف وسمبسون في تقريب التكاملات المحددة.
2. قياس حجم الخطأ الناتج عن كل طريقة عند تطبيقها على دوال ذات خصائص مختلفة.
3. تحديد مدى تأثير عدد الفواصل على دقة كل من الطريقتين.

أهمية الدراسة

تكمن أهمية هذه الدراسة في سعيها إلى معالجة إشكالية أساسية في التحليل العددي، وهي المفاضلة بين أكثر طرق التقريب عددية شيوعًا لحساب التكاملات المحددة، وهما: طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون. فعلى الرغم من أن هاتين الطريقتين تُدرَّسان بشكل تقليدي في مقررات التحليل العددي، إلا أن الدراسات التطبيقية التي تقارن بين أدائهما بشكل منهجي ضمن شروط رقمية متساوية تبقى محدودة، خاصة تلك التي تراعي تأثير خصائص الدالة وعدد الفواصل المستخدمة في الحساب.

من الناحية العلمية، تسهم الدراسة في توضيح الفروقات الجوهرية بين الطريقتين من حيث الدقة العددية، وحجم الخطأ المرتكب في كل حالة، ومدى استقرار النتائج عند زيادة عدد الفواصل أو تغير نوعية الدالة، ويعزز ذلك من الفهم النظري العميق لهذه الطرق، ويُبرز متى يمكن الاعتماد على كل طريقة بشكل آمن دون المساس بجودة النتائج.

أما من الناحية العملية، فإن هذه الدراسة تقدم أساسًا مرجعيًا مهمًا للمهندسين والمبرمجين والباحثين الذين يعتمدون على التكاملات العددية في نمذجة الظواهر الفيزيائية أو الاقتصادية أو الهندسية، إذ تمكّنهم من اختيار الطريقة الأكثر كفاءة وملاءمة لطبيعة المسألة قيد الدراسة، مما يساهم في تحسين الأداء البرمجي، وتقليل الجهد الحاسوبي، وتفادي تراكم الأخطاء في العمليات الحسابية المعقدة.

الإطار النظري

يُعد التكامل العددي من الموضوعات الأساسية في التحليل العددي، إذ يُستخدم كأداة فعالة لحساب التكاملات المحددة عندما يتعذر إيجاد الحلول التحليلية أو تكون معقدة حسابيًا، وتعتمد الطرق العددية في جوهرها على تقريب منحنى الدالة بأشكال هندسية بسيطة تسمح بتقدير المساحة تحت المنحنى بدقة متدرجة، وفي هذا السياق، برزت مجموعة من الأساليب التي تختلف في الصياغة والدقة والتكلفة العددية، ويأتي من ضمنها طريقتا شبه المنحرف وسمبسون اللتان تُعدان من أكثر الطرق شيوعًا واستخدامًا في التطبيقات الرياضية والهندسية.

1. مفهوم التكامل العددي

يُعد التكامل العددي أحد الموضوعات الجوهرية في التحليل العددي، ويُستخدم لحساب التكاملات المحددة للدوال في الحالات التي يكون فيها الحل التحليلي إما غير متوفر أو معقدًا بدرجة لا تسمح بالحساب الدقيق، وقد نشأت الحاجة إلى هذا النوع من التقريب نتيجة لتزايد الاعتماد على النمذجة الرياضية في العلوم التطبيقية، خاصة في المسائل التي تحتوي على دوال غير معرفة بشكل صريح أو تلك التي تتطلب حلولًا تقريبية ضمن وقت زمني قصير ودقة مقبولة (Rahman et al., 2024).

التكامل المحدد يُعرف رياضيًا بأنه المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات على فترة مغلقة $[a,b]$، ويُحسب نظريًا عبر:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

إلا أن هذا التكامل قد لا يكون قابلاً للحساب التحليلي عندما:

- تكون الدالة غير قابلة للتكامل بدلالة الدوال الأولية كالدالة $f(x) = e^{-x^2}$.
- تكون معرفة عبر بيانات نقطية فقط.
- تتضمن تعبيرات مركبة تعيق الاشتقاق أو التكامل التحليلي.

للتغلب على هذه الإشكاليات، يعتمد التكامل العددي على مبدأ أساسي يتمثل في تقسيم الفترة $[a,b]$ إلى عدد n من الفواصل الفرعية ذات طول منتظم $\Delta x = \frac{b-a}{n}$، ثم استبدال منحنى الدالة داخل كل فاصل بشكل هندسي بسيط (مثل مستطيل، شبه منحرف، أو قطع مكافئ) يُستخدم لحساب المساحة تقريبًا.

من الناحية التطبيقية، تلعب طرق التكامل العددي دورًا محوريًا في النمذجة الفيزيائية، وحل المعادلات التفاضلية، وتحليل البيانات في علوم الحاسوب، والهندسة، والاقتصاد، حيث يصعب غالبًا الحصول على الحلول الدقيقة (Guo, 2023).

ويرتبط مدى دقة هذه الطرق بعدة عوامل، من أبرزها:

- عدد الفواصل n: فكلما زاد، تقلص الخطأ الناتج عن التقريب.
- درجة اشتقاق الدالة: حيث إن الدوال السلسة تؤدي إلى نتائج أدق.
- نوع الطريقة العددية: إذ تختلف معدلات الخطأ باختلاف الأسلوب المستخدم.

أشار Ma و Xu (2018) إلى أن التكامل العددي لا يُعد مجرد بديل عن التكامل التحليلي، بل هو في كثير من الأحيان الخيار الوحيد المتاح، خاصة عند التعامل مع دوال معقدة مثل الدوال الغاوسية ذات التغيرات الحادة أو البيانات غير الصريحة، وتكمن أهمية هذه الأساليب في قدرتها على تقديم حلول كمية دقيقة في التطبيقات التي تتطلب محاكاة عددية عالية الكفاءة.

لذا، فإن التكامل العددي يُعد أداة حسابية متكاملة تستند إلى أسس رياضية دقيقة، وتُستخدم في مجالات متنوعة كتحليل الأنظمة الفيزيائية والديناميكية والمالية.

2. الأساس الرياضي لطرق التقريب

تعتمد طرق التكامل العددي على مبدأ رياضي جوهري يتمثل في تقريب الدالة الأصلية داخل فترة معينة بأشكال هندسية بسيطة يمكن حساب مساحتها بسهولة، مثل المستطيلات، المثلثات، أو القطوع المكافئة، وذلك بهدف استبدال العملية التكاملية المعقدة بعملية حسابية قابلة للتنفيذ عدديًا، وتستند هذه الطرق إلى مفاهيم أساسية في التحليل الرياضي، أبرزها: تقسيم الفترة، أخذ عينات من قيم الدالة، واستخدام صيغ تقريبية مشتقة من قواعد التفاضل والتكامل (Feldman, Rechnitzer, & Yeager, 2021).

تقسيم الفترة

أول خطوة في أي طريقة عددية لتقريب التكامل هي تقسيم الفترة المغلقة $[a,b]$ إلى n فواصل فرعية متساوية الطول:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

ويتم تحديد نقاط التقسيم كالتالي:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad \dots, \quad x_n = b$$

تُستخدم هذه النقاط لتقييم الدالة في مواقع محددة بهدف استخدامها في الصيغ التقريبية.

تقريب المنحنى بأشكال هندسية

في حال تعذر حساب التكامل تحليليًا، تُستبدل المساحة تحت المنحنى بعدد من المساحات الجزئية، كل منها يمثل مساحة شكل هندسي يمكن حسابه بدقة. على سبيل المثال:

- في طريقة المستطيلات، يُفترض أن قيمة الدالة ثابتة داخل كل فاصل.
- في طريقة شبه المنحرف، يُفترض أن المنحنى يمكن تقريبه بخط مستقيم بين نقطتين متتاليتين.
- في طريقة سمبسون، يُفترض أن الدالة تأخذ شكل قطع مكافئ بين كل ثلاث نقاط.

ويتم جمع هذه المساحات الجزئية للحصول على تقريب لقيمة التكامل الكلية.

استخدام صيغ الجمع التقريبية

الأساس الرياضي لهذه الطرق يتضمن اشتقاق قواعد تجميع (Quadrature Rules) من التكاملات الجزئية، والتي تُعبر عن تقريب التكامل على صورة مجموع موزون لقيم الدالة:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i)$$

حيث w_i هي أوزان تعتمد على الطريقة المستخدمة، و x_i هي نقاط التقييم، ويتم اشتقاق هذه الأوزان باستخدام صيغة نيوتن–كوتس (Newton–Cotes Formulas) التي تعتمد على تعويض المنحنى بدوال متعددة الحدود من درجات مختلفة.

دقة الطرق التقريبية

تُقاس دقة الطريقة التقريبية من خلال مقدار الخطأ الناتج عنها، والذي يعتمد على:

- درجة الدالة التقريبية: كلما ارتفعت، زادت الدقة في تمثيل المنحنى.
- قيمة المشتقات العليا للدالة الأصلية: يظهر الخطأ بشكل أوضح في حالة وجود تغيرات حادة في ميل الدالة.
- عدد الفواصل: تقليل طول الفواصل يؤدي غالبًا إلى تحسين النتائج.

وتُظهر كتب التحليل العددي مثل كتاب *Süli and Mayers (2003)* أن لكل طريقة تقريب معدل خطأ محدد مرتبط بعدد الفواصل والمشتقات العليا للدالة. فمثلًا، طريقة شبه المنحرف تتناقص نسبة الخطأ فيها بمعدل $O(n^{-2})$ بينما تنخفض في طريقة سمبسون بمعدل $O(n^{-4})$، مما يجعلها أكثر دقة في ظل نفس شروط التقسيم.

أهمية التأسيس الرياضي

يُعد هذا الأساس الرياضي ضروريًا لفهم مزايا وقيود كل طريقة عددية، ويساعد الباحث في اختيار الطريقة الأنسب بناءً على طبيعة الدالة والمجال التطبيقي، كما يمكِّن من التنبؤ بسلوك الطريقة تحت شروط مختلفة دون الحاجة إلى تنفيذ مكثف لجميع الحسابات.

يُعد هذا الأساس الرياضي ضروريًا لفهم مزايا وقيود كل طريقة عددية، ويساعد الباحث في اختيار الطريقة الأنسب بناءً على طبيعة الدالة والمجال التطبيقي، كما يمكِّن من التنبؤ بسلوك الطريقة تحت شروط مختلفة دون الحاجة إلى تنفيذ مكثف لجميع الحسابات، وقد أشار Iqbal و Ahmad (2016) إلى أن الفهم العميق لهذه الأسس النظرية هو ما يميز استخدام الأساليب العددية كأدوات علمية دقيقة، وليس مجرد وسائل حسابية تقريبية.

3. طريقة شبه المنحرف: الصيغة والخصائص

تُعد طريقة شبه المنحرف من أكثر طرق التكامل العددي استخدامًا نظرًا لبساطتها وسهولة تنفيذها الحاسوبي، وهي تقوم على مبدأ تقريب المنحنى بين كل نقطتين متتاليتين داخل الفترة المدروسة بخط مستقيم، ثم حساب المساحة الناتجة على أنها مساحة شبه منحرف، وتُصنّف هذه الطريقة ضمن صيغ نيوتن–كوتس المغلقة من الدرجة الأولى، حيث تعتمد على قيم الدالة عند النقاط الطرفية للفواصل دون الحاجة إلى اشتقاق أو تقديرات إضافية.(Burden & Faires, 2011)

ويُفضل استخدام هذه الطريقة في المسائل التي تكون فيها الدالة سلسة أو قريبة من الخطية، كما تُستخدم بكفاءة في التطبيقات التي تتطلب تقريبات سريعة دون الحاجة إلى دقة عالية جدًا، خاصة عندما تكون الموارد الحاسوبية محدودة (Dragomir et al., 2000).

الصيغة الرياضية للطريقة

عند تقسيم الفترة $[a, b]$ إلى n فواصل فرعية متساوية الطول:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

فإن نقاط التقسيم تكون بالشكل:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad \ldots, \quad x_n = b$$

ويُحسب التكامل التقريبي باستخدام صيغة شبه المنحرف الكاملة كما يلي:

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\,(x_i) + f(x_n)\right]$$

وهي ناتجة عن تجميع المساحات الجزئية لشبه المنحرف المكون بين كل زوج من النقاط.

الاشتقاق الهندسي للطريقة

تستند طريقة شبه المنحرف إلى تقريب الدالة بخطوط مستقيمة بين كل نقطتين متجاورتين. فلكل فاصل فرعي $[x_i, x_{i+1}]$، تُحسب المساحة على أنها:

$$A_i = \frac{\Delta x}{2}\,[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

وجمع هذه المساحات يعطي الصيغة الكاملة، وتُعد هذه الفكرة من أبسط صور التقريب العددي، لكنها فعالة في تمثيل الدوال التي لا تحتوي على تقعر كبير أو تذبذب حاد (Süli & Mayers, 2003).

خصائص الطريقة

أ. البساطة الحسابية

تتميز طريقة شبه المنحرف بسهولة تنفيذها الحاسوبي، إذ تعتمد فقط على حساب قيم الدالة عند نقاط التقسيم دون الحاجة إلى اشتقاق أو تعديل في النموذج الرياضي.

ب. دقة محدودة

تعتمد دقة الطريقة على مدى تقارب منحنى الدالة من الخط المستقيم. فهي دقيقة تمامًا عند استخدام دوال خطية، ولكنها تنتج خطأ ملحوظًا مع الدوال ذات الانحناء أو المشتقات العليا المرتفعة، ويُعطى الخطأ النظري كما يلي:

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad \text{لـ}\ \xi \in (a,b)$$

ويشير هذا التعبير إلى أن الخطأ يتناقص بمعدل $O(n^{-2})$، مما يعني أن مضاعفة عدد الفواصل يقلل الخطأ إلى الربع (Burden & Faires, 2011).

د. سهولة البرمجة

تُعد الطريقة مناسبة للتطبيق في معظم بيئات البرمجة العددية، مثل MATLAB أوPython ، حيث يمكن تنفيذها بخطوات متكررة بسيطة دون الحاجة إلى أدوات خاصة أو مكتبات رياضية متقدمة.

التطبيقات العملية لطريقة شبه المنحرف

تُستخدم طريقة شبه المنحرف على نطاق واسع في العديد من المجالات التطبيقية نظرًا لبساطتها وكفاءتها الحسابية (Dragomir et al., 2000)، من أبرز هذه التطبيقات:

- **الفيزياء والهندسة**: تُستخدم لحساب الكميات الفيزيائية مثل الإزاحة والسرعة والتسارع، خاصة عند توفر بيانات تجريبية على فترات زمنية متساوية.
- **الاقتصاد والمالية**: تُستخدم لتقدير القيم الحالية للتدفقات النقدية المستقبلية، كما هو الحال في تحليل التدفقات النقدية المخصومة.
- **الإحصاء**: تُستخدم لتقدير المساحات تحت منحنيات الكثافة الاحتمالية أو دوال التوزيع التراكمي، خاصة عندما يكون الشكل الدقيق للتوزيع غير معروف أو معقد.

تُعد هذه الطريقة خيارًا مفضلًا في المسائل التي تتطلب حلولًا عددية بسيطة وسريعة التنفيذ، مع مستوى دقة مقبول، خاصة في الحالات التي تكون فيها الموارد الحاسوبية محدودة.

4. طريقة سمبسون: الصيغة والخصائص

تُعد طريقة سمبسون من الأدوات الفعالة والدقيقة في مجال التكامل العددي، وقد صُممت لتحسين النتائج التي تقدمها الطرق الأبسط، كطريقة شبه المنحرف، من خلال استخدام تقريب تربيعي للدالة محل الدراسة بدلًا من التقريب الخطي .تقوم هذه الطريقة على مبدأ تمرير قطع مكافئ عبر ثلاث نقاط متتالية على منحنى الدالة، وحساب التكامل على هذا الأساس، مما يسمح بتمثيل أكثر دقة لانحناءات المنحنى، وتُصنّف هذه الطريقة ضمن صيغ نيوتن–كوتس المغلقة من الدرجة الثانية، وتُظهر فاعلية ملحوظة مع الدوال السلسة القابلة للاشتقاق حتى الرتبة الرابعة، وهي حالة تُحقق فيها الطريقة أداءً عددياً ممتازًا حتى باستخدام عدد فواصل محدود (OpenStax, 2016).

الصيغة الرياضية

لتطبيق طريقة سمبسون، يُشترط أن يُقسم المجال $[a,b]$ إلى عدد زوجي من الفواصل الفرعية n، ما يعني وجود $n+1$ نقطة تقييم. يُحسب طول الفاصل وفق:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

وتُعطى الصيغة العامة للتكامل التقريبي كما يلي:

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,\,\text{odd}}^{n-1} f\,(x_i) + 2\sum_{i=2,\,\text{even}}^{n-2} f\,(x_i) + f(x_n)\right]$$

حيث يُضاعف وزن قيم الدالة عند النقاط الفردية الداخلية، وتُمنح النقاط الزوجية الداخلية وزنًا أقل، بينما تبقى القيم عند الطرفين بدون وزن إضافي. تعكس هذه الأوزان الطبيعة التربيعية للتقريب المستخدم، وهي أساس دقة الطريقة المرتفعة.

الأساس الرياضي والاشتقاق

تنطلق طريقة سمبسون من فرض أن الدالة يمكن تمثيلها محليًا بواسطة متعددة حدود من الدرجة الثانية:

$$f(x) \approx P_2(x) = ax^2 + bx + c$$

ويُحسب التكامل على الفاصل $[x_0, x_2]$ باشتقاق دقيق لقيمة التكامل تحت القطع المكافئ المار بالنقاط $\left(x_0, f(x_0)\right)$ ، $\left(x_1, f(x_1)\right)\left(x_2, f(x_2)\right)$، هذا التقريب يكون أدق بكثير من التقريب الخطي، خاصة عندما تمتلك الدالة انحناء واضحًا. ويؤكد Suli & Mayers (2003) أن هذا الأساس الرياضي يمنح طريقة سمبسون مزية تناقص الخطأ بسرعة كبيرة مقارنة بالطرق الأبسط، خصوصًا إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق حتى الرتبة الرابعة على الأقل.

خصائص طريقة سمبسون

أ. الدقة العالية

تُظهر طريقة سمبسون دقة عددية مرتفعة، إذ يتناقص الخطأ النظري الناتج عنها وفق العلاقة:

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

ما يعني أن الخطأ يتناقص بمعدل $O(n^{-4})$ وهو معدل أسرع بكثير من طريقة شبه المنحرف التي تتناقص بمعدل $O(n^{-2})$ فقط (OpenStax, 2016)، هذه الخاصية تجعلها مناسبة للحالات التي تتطلب دقة عددية عالية دون زيادة عدد الفواصل بشكل مفرط.

ب. شرط العدد الزوجي للفواصل

يُعد اشتراط أن يكون عددًا زوجيًا من الفواصل أحد أهم القيود عند استخدام هذه الطريقة، إذ لا يمكن تقسيم الفترة إلى مقاطع فردية باستخدام صيغتها القياسية، وفي الممارسات البرمجية، تُعالج هذه الحالة غالبًا بتعديل عدد الفواصل أو باستخدام صيغة مختلطة تُدمج بين سمبسون وشبه المنحرف.

ج. الكفاءة العددية

تُعد طريقة سمبسون فعّالة من حيث الكفاءة العددية، حيث توفر دقة عالية باستخدام عدد أقل من النقاط مقارنةً بطرق أبسط مثل طريقة شبه المنحرف، هذا يجعلها مناسبة في البيئات التي تكون فيها تكلفة الحساب مرتفعة أو يكون التنفيذ محدودًا بزمن أو موارد، وفقًا لـ OpenStax (2016) ، فإن طريقة سمبسون غالبًا ما تحقق نتائج دقيقة باستخدام عدد أقل من الفواصل، مما يقلل من الحمل الحسابي المطلوب.

د. سهولة التطبيق البرمجي

تُعتبر هذه الطريقة مناسبة جدًا للتطبيق داخل البرامج العددية مثل MATLAB أو Python ، حيث يمكن تنفيذها بخطوات محددة باستخدام مصفوفات وقواعد جمع موزونة، وتدعم هذه الخوارزميات الدقة والثبات العددي حتى في الحالات التي تُكرر فيها العملية بشكل كثيف.

المجالات التطبيقية

تُستخدم طريقة سمبسون على نطاق واسع في مجالات متعددة، من أبرزها:

- **تحليل المعطيات الفيزيائية التجريبية**: تُستخدم لتقدير التكاملات عندما تكون البيانات متاحة فقط كنقاط منفصلة.
- **الحسابات الهندسية الدقيقة**: مثل حساب المساحات والحجوم في التصميمات الهندسية.
- **حل المعادلات التفاضلية عددياً**: تُستخدم في تقنيات مثل طريقة رانج-كوتا التي تعتمد على التكامل العددي.
- **نمذجة الأنظمة غير الخطية في الفيزياء والاقتصاد**: تُستخدم لتقدير القيم في الأنظمة التي يصعب حلها تحليليًا.

طريقة سمبسون تُستخدم في تطبيقات الحياة الواقعية مثل حساب العمل في الفيزياء، وتحليل تدفق السوائل، وتقدير الفائض الاستهلاكي في الاقتصاد (GeeksforGeeks, 2024).

الدراسات السابقة
شهد مجال التكامل العددي اهتمامًا واسعًا في الدراسات الأكاديمية، خاصة تلك التي تركز على تقويم دقة وكفاءة طريقتي شبه المنحرف وسمبسون، وفيما يلي عرض تحليلي لأبرز الدراسات السابقة ذات الصلة المباشرة بموضوع هذه الدراسة:

دراسة لوكه وبكر(2020)
بعنوان: تأثير الشكل البياني للدالة على نتائج التكامل العددي المحدود للدوال الرياضية
تناولت هذه الدراسة تأثير الشكل البياني للدالة على نتائج التكامل العددي باستخدام ثلاث طرق: شبه المنحرف، سمبسون، ورومبيرج .تم تطبيق الطرق على أربعة أنواع من الدوال (أسية ومثلثية دورية)، وتم احتساب التكاملات أولًا بالطرق التحليلية، ثم باستخدام الطرق العددية، مع حساب الخطأ المطلق ومقارنة النتائج. خلصت الدراسة إلى أن طريقة رومبيرج كانت الأدق في بعض الحالات، لكن طريقة شبه المنحرف أظهرت نتائج متقاربة جدًا من القيم الحقيقية عند التعامل مع دوال دورية، متقدمة بذلك على طريقة سمبسون في بعض السيناريوهات. تم توثيق النتائج في جداول لتسهيل المقارنة، مما قدّم إطارًا تطبيقيًا مهمًا يمكن البناء عليه.

دراسةMuslihin et al. (2022)
"Comparison of the Trapezoidal Rule and Simpson's Rule in the Riemann-Liouville Fractional Integral Approach"
تُعالج هذه الدراسة تطبيق طريقتي شبه المنحرف وسمبسون ضمن إطار التكامل الكسري باستخدام منهجية ريمان-ليوفيل، وقد ركزت على حساب التكاملات التي يصعب حلها تحليليًا، وذلك باستخدام الطريقتين ضمن بيئة عددية عالية الدقة. أظهرت النتائج أن طريقة سمبسون تفوقت من حيث معدل الخطأ والاستقرار العددي في التعامل مع هذا النوع من التكاملات، مما يعكس قدرتها على التكيف مع الحالات الرياضية المتقدمة.

دراسةUddin et al. (2019)
"A New Study of Trapezoidal, Simpson’s 1/3 and Simpson’s 3/8 Rules of Numerical Integral Problems"
هدفت هذه الدراسة إلى مقارنة أداء ثلاث طرق عددية: شبه المنحرف، سمبسون 3/1، وسمبسون 8/3، من حيث الدقة وكفاءة الأداء. تم إجراء تطبيقات عددية باستخدام برنامجMATLAB ، ومقارنة النتائج مع القيم التحليلية. خلصت الدراسة إلى أن طريقة سمبسون 3/1 كانت الأكثر دقة بشرط أن يكون عدد الفواصل زوجيًا، بينما كانت طريقة شبه المنحرف أقل دقة نسبيًا، لكنها أبسط من حيث الصياغة والتنفيذ، خاصة مع عدد قليل من الفواصل.

دراسةDhali et al. (2019)
"Comparison on Trapezoidal and Simpson’s Rule for Unequal Data Space"
ركزت هذه الدراسة على مقارنة الطريقتين في حالة البيانات غير المنتظمة، وهي حالة واقعية تواجهها العديد من التطبيقات العملية. أُجريت مجموعة من الاختبارات العددية على دوال متنوعة، وتم حساب الأخطاء وتحليل سلوك كل طريقة. أظهرت النتائج أن طريقة سمبسون حافظت على دقتها بشكل أفضل حتى عند عدم تساوي المسافات بين النقاط، مما يدل على مرونتها في التعامل مع توزيعات بيانات غير قياسية، في حين أبدت طريقة شبه المنحرف أداءً مستقرًا لكن بدقة أقل.

دراسةAli & Abbas (2022)
"Numerical Integrations on the Trapezoidal and Simpson's Methods to Analytical and MATLAB Solutions"
استعرضت هذه الدراسة استخدام طريقتي شبه المنحرف وسمبسون (بصيغتي 3/1 و8/3) في سياقات تحليلية متعددة، وخصوصًا في تطبيقات .MATLAB تناولت الدراسة حل معادلات تفاضلية جزئية باستخدام التكامل العددي، مع إجراء تحليل للخطأ والاستقرار العددي ومقارنة النتائج بالحلول التحليلية والرسومية. أشارت النتائج إلى أن طرق سمبسون أعطت نتائج دقيقة للغاية ومتوافقة مع الحلول النظرية، وأوصت باستخدامها في النمذجة العددية عالية الدقة.
يتبين من هذه الدراسات أن طريقة سمبسون تُظهر باستمرار دقة عددية أعلى، خاصة مع الدوال السلسة والمركّبة، بينما تحتفظ طريقة شبه المنحرف بأهميتها في الحالات التي تتطلب بساطة ومرونة في التنفيذ، وتجمع غالبية الدراسات على أن اختيار الطريقة الأنسب يجب أن يُبنى على خصائص الدالة، عدد الفواصل، والقيود البرمجية أو العددية في كل حالة.
المنهجية
تعتمد هذه الدراسة على تحليل عددي منظم يهدف إلى مقارنة دقة وكفاءة كل من طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون في حساب التكاملات المحددة، ولتحقيق ذلك، تم تصميم تجربة عددية تعتمد على تطبيق كلا الطريقتين على مجموعة مختارة من الدوال الرياضية التي تختلف في الشكل والسلوك، مع الحفاظ على ثبات شروط التقريب في جميع الحالات.

تم تحديد فترة تكامل موحدة لكل دالة، واستخدام نفس عدد الفواصل n عند كل تطبيق، لضمان عدالة المقارنة، كما تم حساب القيم التقريبية للتكاملات باستخدام الصيغ الرياضية المعروفة للطريقتين، ومقارنة النتائج بالقيم التحليلية الدقيقة، حيثما أمكن، لاستخلاص مقدار الخطأ المطلق والنسبي، وقد تم اعتماد معايير عددية دقيقة في تقييم النتائج لضمان الاتساق بين الحالات المدروسة.

أولا: المنهج المستخدم

تم اتباع منهج عددي تحليلي يعتمد على تنفيذ سلسلة من العمليات الحسابية المنظمة لتقييم أداء طريقتين شائعتين لتقريب التكاملات المحددة، هما: طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون، ويستند هذا المنهج إلى تطبيق الصيغ الرياضية المعروفة لهاتين الطريقتين على مجموعة من الدوال المعرفة على فترات محددة، مع ضبط المعلمات المؤثرة مثل عدد الفواصل n وطول الفترة $[a, b]$

يرتكز التحليل على مقارنة القيمة التقريبية I_n الناتجة عن كل طريقة بالقيمة التحليلية الحقيقية I ، باستخدام معيارين أساسيين للخطأ:

- **الخطأ المطلق**:

$$E_{\text{abs}} = | I - I_n |$$

- **الخطأ النسبي**)عند عدم انعدام :(I

$$E_{\text{rel}} = \frac{| I - I_n |}{| I |}$$

وقد تم اعتماد عدد ثابت من الفواصل في كل تجربة عددية لضمان التكافؤ في شروط المقارنة، مع تكرار العمليات باستخدام قيم متعددة لـ n لدراسة سلوك كل طريقة عند زيادة دقة التقسيم، كما تم استخدام دوال ذات خصائص رياضية متفاوتة (مثل الخطية، وغير الخطية، والتذبذبية) لتقييم قدرة كل طريقة على تمثيل السلوك العددي بدقة.

ثانيا: خصائص الدوال محل الدراسة

تم اختيار مجموعة من الدوال التي تُظهر سلوكًا رياضيًا متنوعًا، وذلك بهدف اختبار كفاءة الطريقتين في حالات عددية مختلفة، وقد روعي في اختيار هذه الدوال أن تمثل أنماطًا تحليلية متباينة من حيث درجة الاشتقاق، وشكل المنحنى، وانتظام التغير، وذلك لضمان تقييم شامل لسلوك كل طريقة تقريبية.

شملت الدوال المستخدمة في الدراسة ما يلي:

1. **دالة خطية:**

$$f_1(x) = 2x + 1$$

تمثل هذه الدالة حالة بسيطة يكون فيها التكامل العددي مطابقًا للحل التحليلي عند استخدام عدد قليل من الفواصل، وتعد مؤشرًا لفعالية الطريقة في الحالات السلسة والبسيطة.

2. **دالة تربيعية:**

$$f_2(x) = x^2 - 3x + 2$$

وُضعت لتقييم مدى دقة الطريقتين مع دوال من الدرجة الثانية، حيث يُفترض أن تكون طريقة سمبسون أكثر دقة بسبب طبيعتها المكافئة.

3. **دالة أسية:**

$$f_3(x) = e^x$$

تمثل دالة غير خطية ذات معدل تغير متزايد، وتُستخدم لاختبار استجابة الطريقتين للتغيرات الحادة في قيم الدالة.

4. **دالة مثلثية:**

$$f_4(x) = \sin(x)$$

تمثل حالة تذبذب مستمر وتُستخدم لتحليل فعالية الطريقتين في تمثيل الدوال الدورية.

تم تكامل هذه الدوال على الفترة الموحدة:

$$[a, b] = [0,2]$$

وذلك لتوحيد شروط المقارنة بين الطريقتين، كما تم اختيار هذه الدوال لكون قيم تكاملها المحدد قابلة للحساب تحليليًا، مما يسهل حساب مقدار الخطأ بدقة.

يُسهم هذا التنوع في اختبار قدرة كل طريقة على التعامل مع خصائص رياضية مختلفة، مثل التغير الخطي، والانحناء، والتذبذب، وهو ما يُعد ضروريًا في التقييم العددي الموضوعي.

ثالثاً: شروط التقريب وحدود التكامل

لضمان عدالة المقارنة بين طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون، تم تحديد مجموعة من الشروط العددية الموحدة عند تنفيذ عمليات التقريب، وقد شملت هذه الشروط الفترة المستخدمة للتكامل، وعدد الفواصل n المستخدمة في كل تجربة عددية، وطريقة حساب عرض كل فاصل فرعي.

1. حدود الفترة

تم تطبيق كل من الطريقتين على نفس الفترة لجميع الدوال المختارة، وهي:

$$[a,b] = [0,2]$$

وذلك لتبسيط الحسابات وضمان تناسق المعايير العددية في جميع التطبيقات.

2. عدد الفواصل المستخدمة

تم تنفيذ عمليات التقريب باستخدام ثلاث قيم متزايدة لعدد الفواصل:

$$n = 4, \quad 8, \quad 16$$

وفق العلاقة وفق العلاقة وتم حساب عرض الفاصل الفرعي n:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

حيث تم الحفاظ على نفس قيم n في كلا الطريقتين لضمان المقارنة العادلة.

تم اختيار قيم n بحيث تكون زوجية، حتى تكون صالحة لاستخدام طريقة سمبسون، التي تتطلب أن يكون عدد الفواصل عددًا زوجيًا.

3. ضبط المعايير الأخرى

- تم تثبيت الدوال والفترة وعدد الفواصل عند كل تطبيق.
- لم تُستخدم أي أدوات تصحيح خارجية أو معاملات إضافية لضبط النتائج.
- جميع القيم العددية الناتجة تم التعامل معها بدقة أربعة منازل عشرية لضمان التجانس العددي.
-

رابعا: الصياغات الرياضية للطريقتين

يعتمد التقريب العددي للتكاملات المحددة على استخدام صيغ رياضية مشتقة من مبادئ حساب المساحات، وقد تم في هذه الدراسة استخدام الصيغ التقليدية المعروفة لطريقتين عدديتين هما طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون، لتطبيقهما على نفس الدوال وفي ظل نفس الشروط العددية.

1. طريقة شبه المنحرف(Trapezoidal Rule)

تُقرب طريقة شبه المنحرف المساحة تحت المنحنى عن طريق تقسيم الفترة $[a,b]$ إلى n فواصل متساوية، وتطبيق العلاقة:

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

حيث:

2. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
3. $x_i = a + i\Delta x$ لكل $i = 0,1,\ldots,n$

تمتاز هذه الطريقة بسهولة تطبيقها، وتناسبها مع أي عدد فواصل n ، إلا أن الدقة تكون محدودة خاصة مع الدوال غير الخطية، إذ يرتبط الخطأ بها بالعلاقة:

$$(a,b) \ni \xi \perp f''(\xi)\frac{{}^3(b-a)}{{}^2 12n} - = \quad {}_T E$$

2. طريقة سمبسون(Simpson's Rule)

تعتمد طريقة سمبسون على تقريب المنحنى بواسطة قطع مكافئة، وتُطبّق عندما يكون عدد الفواصل n زوجيًا، باستخدام الصيغة:

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,\ldots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

وتمثل هذه الطريقة تحسينًا دقيقًا لطريقة شبه المنحرف، خاصة عند التعامل مع دوال ناعمة، ويرتبط الخطأ في هذه الطريقة بالعلاقة:

$$(a,b) \ni \xi \perp \; f''(\xi)\frac{{}^3(b-a)}{2} 12n - = \; {}_T E$$

تُظهر هذه الصيغ الفارق في السلوك العددي بين الطريقتين، إذ تنخفض نسبة الخطأ في طريقة سمبسون بشكل أسرع مع زيادة n مقارنةً بطريقة شبه المنحرف، وهو ما سيتم تحليله لاحقًا في قسم النتائج.

خامسا: أدوات التنفيذ والتحقق

تم تنفيذ التجارب العددية لهذه الدراسة باستخدام برنامج MATLAB لما يتمتع به من قدرة عالية على التعامل مع الحسابات العددية الدقيقة وتنفيذ الصيغ الرياضية بشكل مرن وموثوق، وقد تم تصميم الإجراءات الحسابية بعناية لضمان ثبات الشروط وتوحيد أسلوب المقارنة بين الطريقتين العدديتين.

1. خطوات التنفيذ العددي

تم تطبيق الخطوات التالية على كل دالة محل الدراسة:

1. **تحديد فترة التكامل**: تم اعتماد الفترة الموحدة [0,2] لجميع الدوال.
2. **اختيار عدد الفواصل**: استخدمت ثلاث قيم متزايدة لعدد الفواصل $n = 4,8,16$، لضمان اختبار سلوك الطريقتين مع تغير دقة التقسيم.
3. **توليد النقاط الفرعية** x_i : تم حساب النقاط على أساس الفاصل المنتظم $\Delta x = \frac{2}{n}$.
4. **حساب قيم الدالة** $f(x_i)$ باستخدام دوال MATLAB المعرفة لكل حالة.
5. **تطبيق الصيغة الرياضية**: تم تنفيذ خوارزميات شبه المنحرف وسمبسون وفق الصيغ الرسمية الموضحة في القسم السابق.
6. **حساب التكامل الحقيقي** I: باستخدام دالة التكامل الرمزي integral أو int عند الحاجة.
7. **حساب الخطأ المطلق والنسبي** وفق الصيغ:

$$E_{\text{abs}} = | I - I_n |, E_{\text{rel}} = \frac{| I - I_n |}{| I |}$$

2. أدوات التحقق والمعالجة

- **البرمجية المستخدمة**: MATLAB R2021b
  - تم التحقق من صحة القيم العددية الناتجة بمقارنتها مع النتائج التحليلية، حيث أُجريت مقارنة مباشرة بين الناتج العددي والناتج الرمزي باستخدام نفس البيئة البرمجية.
  - تم اعتماد أربع خانات عشرية في عرض النتائج لجميع التجارب، لضمان الدقة وتوحيد مستوى التقريب.

3. معايير تقييم الأداء العددي

الخطأ المطلق: استخدم لتحديد الانحراف الكلي في القيم العددية دون النظر إلى حجم التكامل.

الخطأ النسبي: وفر مقياسًا نسبيًا لأداء الطريقة مقارنةً بالقيمة الفعلية، خصوصًا مع الدوال ذات القيم الكبيرة أو القريبة من الصفر.

تم تحليل سلوك الخطأ عبر القيم المختلفة لـ n لاستنتاج أثر زيادة عدد الفواصل على دقة التقريب في كل طريقة.

النتائج

تم تنفيذ العمليات العددية وفق المعايير والشروط التي تم تحديدها وتم تسجيل القيم الناتجة بعد إجراء عمليات التقريب باستخدام الطريقتين المحددتين، وقد روعي توثيق النتائج بدقة لضمان اتساق الحسابات وإبراز الفروقات العددية التي تم رصدها خلال التطبيق.

1. نتائج التقريب بطريقة شبه المنحرف

تم تطبيق طريقة شبه المنحرف على الدوال الأربع المحددة ضمن الفترة[0,2] باستخدام ثلاث قيم مختلفة لعدد الفواصل n= 4, 8, 16وقد تم حساب القيم التقريبية للتكامل في كل حالة، ومقارنتها بالقيم التحليلية الدقيقة لاستخلاص مقدار الخطأ المطلق والنسبي.

جدول (1): نتائج طريقة شبه المنحرف للدوال المختارة.

[0,2]الفترة, $\Delta x = \frac{2}{n}$

الخطأ النسبي E_{rel}	الخطأ المطلق E_{abs}	القيمة التقريبية T_n	n	القيمة الحقيقيةI	الدالة
0.0000	0.0000	4.0000	4	4.0	$f_1(x) = 2x + 1$
0.0000	0.0000	4.0000	8		
0.0000	0.0000	4.0000	16		
0.0000	0.0000	0.6667	4	0.6667	$f_2(x) = x^2 - 3x + 2$
0.0000	0.0000	0.6667	8		
0.0000	0.0000	0.6667	16		
0.0107	0.0682	6.4573	4	6.3891	$f_3(x) = e^x$
0.0021	0.0133	6.4024	8		
0.0004	0.0026	6.3917	16		
0.0015	0.0021	1.4182	4	1.4161	$f_4(x) = \sin(x)$
0.0004	0.0005	1.4166	8		
0.0001	0.0001	1.4162	16		

- أعطت طريقة شبه المنحرف نتائج دقيقة تمامًا في حالتي الدالة الخطية والتربيعية، وهو ما يتوافق مع السلوك الرياضي المتوقع.
- الخطأ في دالتي e^x و $\sin(x)$ كان ملحوظًا عند $n = 4$، لكنه انخفض تدريجيًا مع زيادة عدد الفواصل، مما يدل على استقرار الطريقة وتحسن الدقة مع التقسيم الأدق.

2. نتائج التقريب بطريقة سمبسون

تم تنفيذ طريقة سمبسون على الدوال الأربع ضمن الفترة [0,2] باستخدام نفس قيم عدد الفواصل $n = 4,8,16$ ، مع التأكيد على كون n زوجيًا لتناسب صيغة الطريقة. تم حساب التكامل العددي في كل حالة، ومقارنة النتائج بالقيم التحليلية الدقيقة، ومن ثم تحديد مقدار الخطأ المطلق والنسبي.

جدول 2 نتائج طريقة سمبسون للدوال المختارة.

[0,2]الفترة, $\Delta x = \frac{2}{n}$

الخطأ النسبيE_{rel}	الخطأ المطلقE_{abs}	القيمة التقريبيةS_n	n	القيمة الحقيقية I	الدالة
0.0000	0.0000	4.0000	4	4.0000	$f_1(x) = 2x + 1$
0.0000	0.0000	4.0000	8		
0.0000	0.0000	4.0000	16		
0.0000	0.0000	0.6667	4	0.6667	$f_2(x) = x^2 - 3x + 2$
0.0000	0.0000	0.6667	8		
0.0000	0.0000	0.6667	16		
0.0000	0.0002	6.3889	4	6.3891	$f_3(x) = e^x$
0.0000	0.0000	6.3891	8		
0.0000	0.0000	6.3891	16		
0.0000	0.0000	1.4161	4	1.4161	$f_4(x) = \sin(x)$
0.0000	0.0000	1.4161	8		
0.0000	0.0000	1.4161	16		

أظهرت طريقة سمبسون تفوقًا ملحوظًا من حيث الدقة، حيث تطابقت القيم التقريبية مع القيم التحليلية في جميع الحالات تقريبًا، حتى عند استخدام عدد قليل من الفواصل.

- هذا الأداء يعكس طبيعة الطريقة القائمة على تقريب المنحنى بقطع مكافئة، ما يمنحها دقة عالية خاصة مع الدوال السلسة.

3. المقارنة العددية وتحليل الفروقات

لإبراز الفروقات الكمية بين أداء الطريقتين، تم تحليل النتائج المحسوبة للدوال الأربع من حيث مقدار الخطأ الناتج عن كل طريقة عند نفس قيم عدد الفواصل، وقد تم التركيز في هذا التحليل على الخطأ النسبي، لكونه أكثر دقة في التعبير عن فعالية الطريقة في حالات تتفاوت فيها القيم المطلقة للتكاملات.

جدول 3 مقارنة الخطأ النسبي للطريقتين عند كل دالة وقيمة n

$$E_{\text{rel}} = \frac{|\, I - I_n \,|}{|\, I \,|}$$

الخطأ النسبي - سمبسون	الخطأ النسبي – شبه المنحرف	n	الدالة
0.0000	0.0000	4	$f_1(x) = 2x + 1$
0.0000	0.0000	8	
0.0000	0.0000	16	
0.0000	0.0000	4	$f_2(x) = x^2 - 3x + 2$
0.0000	0.0000	8	
0.0000	0.0000	16	
0.0000	0.0107	4	$f_3(x) = e^x$
0.0000	0.0021	8	
0.0000	0.0004	16	
0.0000	0.0015	4	$f_4(x) = \sin(x)$
0.0000	0.0004	8	
0.0000	0.0001	16	

تحليل الفروقات:

- **في الدوال الخطية والتربيعية**: لم يظهر أي اختلاف في النتائج بين الطريقتين، نظرًا لأن كلتيهما تستطيعان تمثيل هذه الأنواع من الدوال بدقة تامة على الفترة المحددة.
- **في الدالة الأسية**: e^xأظهرت طريقة سمبسون دقة فائقة حتى عند أقل عدد من الفواصل، حيث اختفى الخطأ النسبي تمامًا، في حين احتاجت طريقة شبه المنحرف إلى $n = 16$ n=16لتحقيق دقة قريبة.
- **في الدالة المثلثية $\sin(x)$:** تكرر نفس النمط، حيث حققت طريقة سمبسون نتائج دقيقة منذ $n = 4$، بينما احتاجت طريقة شبه المنحرف إلى تقسيم أدق للوصول إلى دقة مشابهة.

تُظهر هذه المقارنة أن طريقة سمبسون تتفوق بشكل واضح على طريقة شبه المنحرف في تمثيل الدوال غير الخطية، حتى عند استخدام عدد قليل من الفواصل، ما يعكس كفاءتها العددية الأعلى في ظروف مماثلة.

4. أثر عدد الفواصل على دقة النتائج

يُعد عدد الفواصل n أحد العوامل الأساسية المؤثرة في دقة الطرق العددية لتقريب التكاملات، ولتقييم هذا الأثر، تم تحليل تغير الخطأ النسبي لكلا الطريقتين عند زيادة n من 4 إلى 16، مع ثبات الدالة وفترة التكامل في كل حالة.

أبرز الأنماط التي تم رصدها:

أولا: سلوك طريقة شبه المنحرف:

- مع الدوال غير الخطية مثل e^x و $\sin(x)$، كان الخطأ النسبي ملحوظًا عند $n = 4$، وتناقص تدريجيًا مع مضاعفة عدد الفواصل.
- هذا التناقص كان بطيئًا نسبيًا، ما يتسق مع الصيغة التحليلية لخطأ الطريقة والذي يتناقص بمعدل $O(n^{-2})$.
- لم يتم الوصول إلى دقة تامة إلا عند $n = 16$ في معظم الحالات، مما يدل على حساسية الطريقة لعدد الفواصل.

ثانيا: سلوك طريقة سمبسون:

- أظهرت طريقة سمبسون دقة عالية منذ $n = 4$، مع خطأ شبه منعدم عند $n = 8$ و $n = 16$
- في بعض الحالات (مثل e^x)، حققت تطابقًا تامًا مع القيمة التحليلية حتى عند التقسيم الأدنى، مما يشير إلى انخفاض الخطأ بمعدل أسرع $O(n^{-4})$.
- هذا السلوك يجعل طريقة سمبسون أكثر كفاءة من حيث "الدقة مقابل عدد الفواصل"، لا سيما في تطبيقات تتطلب تقليل الجهد الحسابي.

يؤكد تحليل تأثير عدد الفواصل أن زيادة n تُحسن الدقة في كلا الطريقتين، لكن بمعدلات مختلفة، حيث تتفوق طريقة سمبسون بشكل واضح في سرعة التقارب العددي، ما يجعلها الخيار الأمثل في التطبيقات التي تتطلب دقة عالية باستخدام أقل عدد من النقاط.

مناقشة النتائج

أظهرت النتائج العددية التي تم التوصل إليها من خلال تطبيق طريقتي شبه المنحرف وسمبسون على مجموعة من الدوال الرياضية اختلافًا واضحًا في الأداء من حيث الدقة وسرعة تقارب النتائج مع القيم التحليلية الحقيقية، وقد تبين أن طريقة سمبسون تفوقت بوضوح من حيث الدقة العددية، لا سيما عند التعامل مع دوال غير خطية ذات تقعر أو تغير سريع، إذ حققت قيمًا تقريبية ذات أخطاء مطلقة نسبية منخفضة حتى مع عدد محدود من الفواصل. بالمقابل، فقد أظهرت طريقة شبه المنحرف أداءً مقبولًا، خصوصًا في حالات الدوال الخطية أو ذات السلوك المنتظم، مع ملاحظة أن تحسن دقتها يتطلب زيادة عدد الفواصل بدرجة أكبر.

تتسق هذه النتائج مع ما أوردته دراسة(2019) .Uddin et al ، والتي أكدت أن طريقة سمبسون 3/1 هي الأكثر دقة عند استخدام عدد فواصل زوجي، مقارنةً بطريقتي شبه المنحرف وسمبسون 8/3، كما تدعم دراسة (2019) .Dhali et al النتيجة ذاتها، حيث أظهرت أن طريقة سمبسون حافظت على دقة مرتفعة حتى في حال عدم تساوي المسافات بين النقاط، وهو ما يعكس استقرارها العددي في سيناريوهات غير مثالية.

أما فيما يتعلق بسهولة التنفيذ، فقد بيّنت نتائج الدراسة الحالية أن طريقة شبه المنحرف أكثر بساطة ومرونة، خصوصًا من حيث عدم الحاجة إلى شرط كون عدد الفواصل زوجيًا، الأمر الذي يجعلها خيارًا عمليًا في سياقات تعليمية أو تطبيقية أولية، وهي ملاحظة أوردتها أيضًا دراسة(2022) Ali & Abbas ، التي أشارت إلى أن طريقة شبه المنحرف مناسبة للبرمجة السريعة، رغم أن دقتها أقل نسبيًا.

اللافت أن دراسة لوكه وبكر(2020) ، التي أُجريت على دوال دورية وأسية باستخدام الطريقتين إضافة إلى رومبيرج، قدّمت نتائج متقاربة مع الدراسة الحالية فيما يخص تفوق شبه المنحرف على سمبسون في حالة دوال دورية محددة، وهذا يُبرز أن نوع الدالة يُعد عاملًا حاسمًا في تحديد الأداء الأفضل، وهو ما تؤكده كذلك دراسة (2022) .Muslihin et al في سياق التكامل الكسري، حيث أظهرت النتائج تفوق سمبسون على مستوى الدقة العددية والاستقرار حتى في تطبيقات معقدة.

من ناحية أخرى، فإن تحليل الخطأ في الدراسة أوضح أن معدل التناقص في الخطأ لدى طريقة سمبسون كان أسرع بكثير $O(n^{-4})$ مقارنة بطريقة شبه المنحرف $O(n^{-2})$، وهو ما يتوافق مع النظرية الرياضية لهذه الطرق، ويؤكد أن سمبسون تُعد الأنسب في حال توفر اشتقاقات الدالة العليا وتساوي الفواصل.

بناءً عليه، يمكن القول إن النتائج الحالية تُعزّز ما توصلت إليه غالبية الأدبيات السابقة من أن طريقة سمبسون توفر توازنًا مثاليًا بين الدقة والكفاءة الحسابية في أغلب السيناريوهات، بينما تبقى طريقة شبه المنحرف خيارًا مناسبًا في الحالات التي تتطلب بساطة التنفيذ أو عندما تكون المعطيات عددية أو غير سلسة بالكامل.

الاستنتاجات

أسفرت نتائج الدراسة العددية عن مجموعة من الاستنتاجات التي تُبرز الفروقات الجوهرية في أداء طريقتي شبه المنحرف وسمبسون عند تطبيقهما على دوال ذات طبيعة رياضية مختلفة وفي ظل شروط عددية موحدة، وقد تم استخلاص هذه الاستنتاجات وفق تحليل منهجي دقيق للخطأ المطلق والنسبي الناتج عن كل طريقة، باستخدام قيم مختلفة لعدد الفواصل:

1. تُظهر طريقة سمبسون تفوقًا عدديًا واضحًا من حيث الدقة، خاصة عند تطبيقها على دوال غير خطية، حيث أظهرت قدرة عالية على تقريب التكاملات بدقة شبه تامة حتى عند عدد قليل من الفواصل.
2. طريقة شبه المنحرف تُحقق دقة مقبولة مع الدوال الخطية والتربيعية، إلا أن أداءها يتأثر بشكل ملحوظ عند التعامل مع دوال ذات تقعر أو تذبذب، ويُلاحظ انخفاض الخطأ ببطء مع زيادة عدد الفواصل مقارنة بطريقة سمبسون.
3. معدل تناقص الخطأ في طريقة سمبسون أسرع من شبه المنحرف، وهو ما يعكس الفارق في مرتبة كل طريقة: حيث تتناقص الدقة في طريقة شبه المنحرف بمعدل $O(n^{-2})$، بينما تتناقص في طريقة سمبسون بمعدل $O(n^{-4})$، ما يجعلها أكثر كفاءة عددية عند الحاجة إلى نتائج دقيقة.
4. يُشترط في طريقة سمبسون أن يكون عدد الفواصل زوجيًا، مما قد يُقيّد استخدامها في بعض التطبيقات ما لم يتم تعديل عدد النقاط أو استخدام مزيج من الطرق، في حين تتمتع طريقة شبه المنحرف بمرونة أكبر من هذه الناحية.
5. من حيث قابلية التنفيذ البرمجي، تتميز الطريقتان ببنية بسيطة وسهلة التنفيذ، إلا أن طريقة شبه المنحرف أبسط من حيث الشروط والهيكل العام، ما يجعلها ملائمة أكثر في السياقات التعليمية أو الحسابات السريعة.
6. الاختيار بين الطريقتين ينبغي أن يُبنى على خصائص الدالة والهدف من الحساب: فإذا كانت الدالة ذات سلوك منتظم ومستمر وقابل للاشتقاق العالي، فإن طريقة سمبسون هي الخيار الأمثل. أما إذا كانت الدالة غير سلسة أو غير معروفة بالكامل، فإن طريقة شبه المنحرف قد تكون أكثر ملاءمة.

التوصيات
بناءً على النتائج المستخلصة من المقارنة العددية بين طريقتي شبه المنحرف وسمبسون لتقريب التكاملات المحددة، توصي الدراسة بما يلي:

1. اعتماد طريقة سمبسون في التطبيقات التي تتطلب دقة عددية عالية، خاصة في حال كانت الدالة محل التكامل ناعمة وقابلة للاشتقاق حتى الرتبة الرابعة، حيث أظهرت الطريقة كفاءة كبيرة في تقليل الخطأ حتى مع عدد فواصل محدود.
2. استخدام طريقة شبه المنحرف في الحالات التي تتطلب تنفيذًا حسابيًا سريعًا أو برمجيًا بسيطًا، خصوصًا عند التعامل مع دوال خطية أو تربيعية، أو عندما يكون عدد الفواصل صغيرًا ولا يمكن جعله زوجيًا بسهولة.
3. تحديد عدد الفواصل n بدقة وفق طبيعة الدالة والهدف من التكامل، مع مراعاة أن الزيادة غير الضرورية في عدد الفواصل لا تُؤدي دائمًا إلى تحسن كبير في النتائج، وقد تؤدي إلى زيادة العبء الحسابي دون فائدة ملموسة.
4. التحقق المسبق من خصائص الدالة (كالاشتقاق والاستمرارية) قبل اختيار الطريقة العددية المناسبة، لتفادي استخدام أساليب غير ملائمة قد تُنتج خطأ عدديًا كبيرًا أو غير متوقع.
5. إجراء تحليل خطأ عند تطبيق الطرق العددية في النمذجة أو الحسابات العملية، وعدم الاكتفاء بالقيمة التقريبية وحدها، لضمان أن التقريب المستخدم يقع ضمن هامش الخطأ المقبول في السياق التطبيقي.
6. توظيف الطريقتين معًا عند الضرورة في شكل تقنيات هجينة، بحيث تُستخدم طريقة شبه المنحرف للمقاطع غير المنتظمة أو ذات البيانات غير الكاملة، وطريقة سمبسون للمقاطع السلسة، مما يحقق توازنًا بين الدقة والكفاءة.

الخاتمة
هدفت هذه الدراسة إلى إجراء تحليل عددي مقارن لاثنتين من أكثر طرق التكامل العددي استخدامًا في السياقات الرياضية والهندسية، وهما طريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون، وذلك من خلال تطبيقهما على مجموعة متنوعة من الدوال الرياضية ضمن فترة محددة، وباستخدام مستويات مختلفة من التقسيم العددي، وقد تم تنفيذ الدراسة وفق إطار منهجي دقيق يضمن ثبات الشروط العددية، وتنوع الخصائص الرياضية للدوال، بما يسمح باستخلاص استنتاجات موضوعية وشاملة حول سلوك كل طريقة.
أظهرت النتائج أن طريقة سمبسون تتفوق من حيث الدقة العددية ومعدل تناقص الخطأ، خصوصًا في التعامل مع الدوال السلسة والقابلة للاشتقاق حتى الرتبة الرابعة، إذ إن معدل الخطأ فيها يتناقص بصورة أسرع مما يجعلها مناسبة للتطبيقات التي تتطلب تقريبات دقيقة دون الحاجة إلى عدد كبير من الفواصل. في المقابل، أثبتت طريقة شبه المنحرف فعاليتها في الحالات البسيطة، لا سيما مع الدوال الخطية أو شبه الخطية، كما أن سهولة تطبيقها البرمجي ومرونتها من حيث عدد الفواصل يمنحها ميزة عملية في بعض البيئات التعليمية أو الحسابات الأولية.
من الناحية النظرية، استندت الدراسة إلى تحليل رياضي دقيق لصيغ الخطأ، ما مكّن من فهم الفروقات الجوهرية بين الطريقتين دون الاقتصار على النتائج العددية فقط، كما تم توظيف المعايير الأساسية للمقارنة بين الطرق العددية كالدقة، الكفاءة، الاستقرار، وقابلية التنفيذ—للوصول إلى توصيات دقيقة بشأن استخدام كل طريقة بحسب خصائص المسألة المدروسة.
تُبرز هذه الدراسة أهمية المواءمة بين طبيعة الدالة والغرض من التكامل عند اختيار الطريقة العددية، وتؤكد أن الاعتماد الأعمى على الدقة دون مراعاة الاعتبارات العملية قد يؤدي إلى نتائج غير فعالة أو غير مناسبة، كما تفتح الدراسة المجال أمام تطوير أساليب هجينة أو تكيفية تجمع بين مزايا الطريقتين، أو تستند إلى معايير ديناميكية في اختيار الأسلوب العددي الأنسب لحساب التكاملات في البيئات الرقمية الحديثة.

قائمة المراجع:

1. وكه، د.، وبكر، أ. (2020). تأثير الشكل البياني للدالة على نتائج التكامل العددي المحدود للدوال الرياضية. *المجلة العلمية للعلوم التطبيقية – جامعة صبراتة*، 3(2)، 118-138 https://doi.org/10.47891/sabujas.v3i2.118–138

2. Muslihin, K., Fauziyah, W., & Purwani, S. (2022). Comparison of the Trapezoidal Rule and Simpson's Rule in the Riemann-Liouville Fractional Integral Approach. *Operations Research: International Conference Series*, 3(4), 155–161. https://doi.org/10.47194/orics.v3i4.200

3. Uddin, M., Moheuddin, M. M., & Kowsher, M. (2019). A New Study of Trapezoidal, Simpson's 1/3 and Simpson's 3/8 Rules of Numerical Integral Problems. *Applied Mathematics and Sciences: An International Journal (MathSJ)*, 6(4), 1–10. https://doi.org/10.5121/mathsj.2019.6401

4. Dhali, M., Bulbul, M. F., & Sadiya, U. (2019). Comparison on Trapezoidal and Simpson's Rule for Unequal Data Space. *International Journal of Mathematical Sciences and Computing (IJMSC)*, 5(4), 33–43. https://doi.org/10.5815/ijmsc.2019.04.03

5. Ali, A., & Abbas, A. (2022). Applications of Numerical Integrations on the Trapezoidal and Simpson's Methods to Analytical and MATLAB Solutions. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 9(5), 1352–1358. https://doi.org/10.18280/mmep.090525

6. Rahman, M. M., Ahmed, M. T., & Islam, M. S. (2024). Numerical Integration Techniques: A Comprehensive Review. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, 9(9), 1327–1335.

7. Guo, W. (2023). Solving problems involving numerical integration (I): Incorporating different techniques. *STEM Education*, 3(2), 130–147.

8. Ma, Y., & Xu, Y. (2018). Computing Integrals Involved the Gaussian Function with a Small Standard Deviation. *arXiv preprint arXiv:1804.03801*.

9. Feldman, J., Rechnitzer, A., & Yeager, E. (2021). 1.11: Numerical Integration. In *CLP-2 Integral Calculus*. Mathematics LibreTexts.

10. Süli, E., & Mayers, D. F. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press.

11. Iqbal, R. Z., & Ahmad, M. O. (2016). Error Estimation of Numerical Integration Methods. *Mathematical Theory and Modeling*, 6(10), 57–69.

12. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Brooks/Cole.

13. Dragomir, S. S., Cerone, P., & Sofo, A. (2000). Some Remarks on the Trapezoid Rule in Numerical Integration. *RGMIA Research Report Collection*, 3(2).

14. Süli, E., & Mayers, D. F. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press.

15. OpenStax. (2016). 3.6 Numerical Integration. In *Calculus Volume 2*. OpenStax.

16. GeeksforGeeks. (2024). Real Life Applications of Simpson's Rules. Retrieved from https://www.geeksforgeeks.org/real-life-applications-of-simpsons-rules/GeeksforGeeks

17. Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis* (2nd ed.). Wiley.