Libyan Journal of Medical and Applied Sciences LJMAS
Online ISSN: 3006-1113
Volume 3, Issue 3, 2025, Page No: 201-210
Website: https://ljmas.com/index.php/journal/index

New Numerical Methods for Solving Systems of Stochastic Differential Equations

Eisha Mohamed Ali Saleem *
[1] Department of Mathematics, Faculty of Science, Misurata University, Misurata, Libya
*Corresponding author: Aishasaleim205@gmail.com

Received: July 13, 2025 Accepted: September 26, 2025 Published: September 30, 2025

Abstract:
This study investigates and compares the numerical performance of the Euler–Maruyama and Hybrid RK–Milstein methods for solving stochastic differential equations (SDEs). Despite the wide use of Euler–Maruyama for its simplicity, its accuracy and stability degrade under strong stochastic effects, highlighting the need for a more stable hybrid approach. The methodology involves implementing both algorithms in MATLAB using multiple time steps ($\Delta t = 0.0078125$ to 0.0009766) and evaluating their strong convergence, runtime efficiency, and stability. A reference solution with 8192-time steps was used for benchmarking, and both statistical and graphical analyses were performed to assess performance. The results show that Euler–Maruyama achieved a strong convergence rate of approximately −0.56 with lower runtime (0.33–1.95 s), while the Hybrid RK–Milstein method maintained stable errors (~0.045) but required higher computational time (2.77–15.37 s). The hybrid method produced smoother trajectories and better variance control, especially in high-noise conditions. For future work, adaptive hybrid algorithms are proposed to balance computational cost and numerical stability for complex long-term stochastic simulations.

Keywords: Stochastic Differential Equations, Hybrid Algorithms, Numerical Simulation, Stochastic Regression, Dispersion Coefficient.

طرق عددية جديدة لحل أنظمة المعادلات التفاضلية العشوائية

عائشة محمد علي سليم *
[1] قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة مصراتة، مصراتة، ليبيا

الملخص
تتناول هذه الدراسة مقارنة الأداء العددي بين طريقتي أويلر–ماريا ما والهجينة RK–Milstein في حل المعادلات التفاضلية العشوائية (SDEs). ورغم شيوع استخدام طريقة أويلر–ماريا ما لبساطتها، إلا أن دقتها واستقرارها يتراجعان في الأنظمة ذات التأثيرات العشوائية القوية، مما يبرز الحاجة إلى نهج هجيني أكثر استقرارًا. اعتمدت المنهجية على تنفيذ الخوارزميتين باستخدام برنامج MATLAB عبر خطوات زمنية متعددة (من $\Delta t = 0.0078125$ إلى 0.0009766)، مع مقارنة التقارب القوي، وكفاءة التنفيذ، والاستقرار العددي. تم اعتماد حل مرجعي مكون من 8192 خطوة زمنية للمقارنة، واستخدم التحليلان الإحصائي والبياني لتقييم الأداء. أظهرت النتائج أن طريقة أويلر–ماريا ما حققت رتبة تقارب قوية −0.56 بزمن تنفيذ منخفض (0.33–1.95 ثانية)، بينما حافظت الطريقة الهجينة على خطأ ثابت يقارب 0.045 لكنها استغرقت زمنًا أطول (2.77–15.37 ثانية). كما أنتجت الطريقة الهجينة مسارات أكثر سلاسة وتحكمًا أفضل في التباين خاصة في البيئات ذات الضوضاء العالية. في الأعمال المستقبلية، يُقترح تطوير خوارزميات هجينة تكيفية توازن بين الكفاءة الحسابية والاستقرار العددي في النماذج العشوائية طويلة الأمد.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العشوائية، الخوارزميات الهجينة، المحاكاة العددية، الانحدار العشوائي، معامل التشتت.

مقدمة

تُعدّ المعادلات التفاضلية العشوائية (Stochastic Differential Equations – SDEs) من أهم الأدوات الرياضية الحديثة في تمثيل الظواهر الديناميكية التي تتأثر بعوامل عدم اليقين أو التقلبات العشوائية. فقد أصبحت هذه المعادلات أساسية في العديد من التطبيقات الواقعية، مثل الأنظمة الفيزيائية والهندسية والمالية والبيولوجية، حيث يصعب تمثيل السلوك الحقيقي للأنظمة بمعادلات تفاضلية حتمية فقط.

كما تبين أن النماذج العشوائية توفر تمثيلًا أدق للعمليات الطبيعية التي تتعرض لتأثيرات غير متوقعة، مثل التغيرات البيئية، أو الضوضاء الحرارية، أو اضطرابات البيانات، مشيرين إلى أن المعادلات التفاضلية العشوائية تشكل إطارًا عامًا لوصف هذه الأنظمة والتنبؤ بسلوكها على المدى الطويل [1].

في حين أنه بالنظر إلى أن المعادلات العشوائية لم تعد مقتصرة على التطبيقات التقليدية، بل دخلت مؤخرًا مجالات الذكاء الاصطناعي وتوليد البيانات (Generative Modeling)، حيث يتم استخدامها في بناء النماذج الإحصائية الديناميكية التي تحاكي تطور الأنظمة المعقدة مثل الشبكات العصبية والرسوم البيانية الديناميكية [2].

من هنا، تتضح الأهمية البالغة لدراسة هذه المعادلات وتطوير أساليب عددية دقيقة وفعّالة لحلها، بما يسهم في تحسين النمذجة والتنبؤ والتحكم في الأنظمة العشوائية.

رغم التطور الملحوظ في دراسة المعادلات التفاضلية العشوائية، فإن حلها العددي لا يزال يواجه العديد من التحديات .تختلف هذه المعادلات عن نظيراتها الحتمية في احتوائها على عناصر عشوائية (Noise Terms) تؤدي إلى صعوبة في إيجاد الحلول الدقيقة تحليليًا، مما يجعل اللجوء إلى الطرق العددية أمرًا ضروريًا.

بإجراء مراجعة شاملة لأبرز التحديات المرتبطة باستقرار الطرق العددية المطبقة على أنظمة المعادلات التفاضلية العشوائية، تبين أن الحفاظ على الاستقرار العددي والدقة يتطلب تطوير خوارزميات قادرة على التعامل مع الضوضاء القوية والظروف غير الخطية [3].

من جانب آخر، بدراسة الطرق التقليدية مثل طريقة أويلر وميلشتاين، رغم بساطتها، تعاني من بطء في التقارب وازدياد الخطأ العددي مع الزمن أو عند تطبيقها على الأنظمة المعقدة، مما يحدّ من فعاليتها في النماذج العشوائية الواقعية [4] .

فقد بيّنا أن استخدام الأساليب الحديثة مثل الشبكات العصبية في حل المعادلات التفاضلية (سواء كانت عشوائية أو جزئية) قد فتح آفاقًا جديدة، لكنه لا يخلو من تحديات تتعلق بضبط المعلمات وتحقيق التوازن بين الدقة الحسابية والعبء الحاسوبي [5] .

بناءً على ذلك، يتضح أن الحاجة ملحّة إلى ابتكار طرق عددية جديدة تجمع بين الكفاءة والدقة والاستقرار، خاصة عند التعامل مع أنظمة متعددة المتغيرات أو ذات معاملات زمنية متغيرة.

انطلاقًا من تلك التحديات، تبرز الحاجة إلى تصميم وتطوير طرق عددية جديدة أكثر مرونة واستقرارًا لحل أنظمة المعادلات التفاضلية العشوائية. كما تبين أن الطرق الشرائحية (Piecewise or Layered Numerical Methods) تمثل توجهًا واعدًا نحو تحسين كفاءة الحل من خلال تقسيم مجال الزمن إلى شرائح جزئية متكيفة مع طبيعة الضوضاء العشوائية، مما يقلل من تراكم الخطأ ويزيد من استقرار النتائج [1] .

وبالاعتماد على طرق تحويلية (Transform Methods) مثل طريقة التحويل التفاضلي، التي تسمح بتبسيط الأنظمة المعقدة وتحويلها إلى صيغ عددية قابلة للحل بتكلفة حاسوبية أقل [4] .

أما من الناحية العالمية، فإن أهمية إيجاد طرق عددية جديدة تراعي خصائص الاستقرار القوي (Strong Stability) والتقارب تحت الشروط غير الليبشيتزية(Non-Lipschitz Conditions) ، والتي تعد من أكثر الحالات تحديًا في الأنظمة العشوائية.

وعليه، يهدف هذا البحث إلى سد جزء من الفجوة البحثية من خلال اقتراح طريقة عددية مبتكرة تجمع بين ميزات الدقة العالية والاستقرار العددي والتطبيق الواسع على مختلف أنواع المعادلات العشوائية [3] .

أهداف البحث

يركز هذا البحث على تطوير طريقة عددية جديدة لحل أنظمة المعادلات التفاضلية العشوائية ذات الضوضاء المتعددة والمعاملات الزمنية المتغيرة، مع تقييم أدائها مقارنة بالطرق التقليدية المعروفة.

تتمثل الأهداف الرئيسة للبحث فيما يلي:

1. تحليل نقدي للطرق العددية الحالية وتحديد أوجه القصور في تطبيقها على الأنظمة العشوائية المعقدة.
2. تطوير خوارزمية عددية جديدة تعتمد على الدمج بين طريقة شرائحية وتقنيات تحويل تفاضلي متكيفة.
3. تحليل رياضي لاستقرار وتقارب الطريقة المقترحة تحت ظروف عشوائية مختلفة.
4. تنفيذ تجارب عددية مقارنة لتقييم دقة وكفاءة الطريقة الجديدة مقابل الطرق الكلاسيكية (EULER–MARUYAMA)، (MILSTEIN).

الإطار النظري للمعادلات التفاضلية العشوائية

تُعد المعادلات التفاضلية العشوائية (Stochastic Differential Equations, SDEs) امتدادًا طبيعيًا للمعادلات التفاضلية العادية (ODEs) بإضافة عنصر العشوائية لتمثيل التأثيرات غير المتوقعة أو الضوضاء في الأنظمة الديناميكية. ويُعبر الشكل العام للـ SDE عن التطور الزمني لمتغير عشوائي X_t كما يلي:

$$dX_t = f(X_t, t)dt + g(X_t, t)dW_t$$

حيث:

- $f(X_t, t)$ هو الجزء الحتمي (drift term) الذي يمثل الاتجاه العام لحركة النظام.
- $g(X_t, t)$ هو الجزء العشوائي (diffusion term) الذي يصف تأثير الضوضاء أو التقلبات العشوائية.
- W_t عملية Wiener process (Brownian motion) التي تمثل المصدر الأساسي للعشوائية.

وفقًا لـ [6]، فإن المعادلات التفاضلية العشوائية تُستخدم بشكل متزايد في النمذجة الرياضية لخوارزميات التعلم الآلي، وخاصةً في تحليل خوارزميات الانحدار العشوائي (Stochastic Gradient Descent - SGD). حيث أظهر الباحثون أن ديناميكيات تحديث أوزان الشبكات العصبية في الـ SGD يمكن تمثيلها تقريبًا بمعادلة SDE من الشكل:

$$d\theta_t = -\nabla L(\theta_t)dt + \sqrt{2D(\theta_t)}dW_t$$

وهذا التمثيل يتيح دراسة خصائص التقارب والاستقرار من منظور رياضي دقيق، من خلال أدوات التحليل الاحتمالي.

من جانب آخر، وسّعت دراسة [7] هذا الإطار ليشمل خوارزمية Sharpness-Aware Minimization (SAM)، واقترحوا معادلة SDE جديدة تصف تطور معلمات النموذج أثناء التدريب مع أخذ تقلبات المنحدر (gradient perturbations) بعين الاعتبار. وقد أوضحوا أن إدخال مكونات الانتشار (diffusion components) في هذه المعادلات يوفر فهمًا أعمق لتوازن الاستكشاف والاستغلال أثناء عملية التعلم.

أما [8]، فقد تناولوا الجانب البياني والبياني-البياني (data-driven) من المعادلات التفاضلية العشوائية، واقترحوا إطارًا لاكتشاف SDEs مباشرة من البيانات دون افتراض نموذج مسبق. يعتمد هذا النهج على تقنيات التعلم العميق (Deep Learning) لاشتقاق كل من دوال $f(x,t)$ و $g(x,t)$ استنادًا إلى الملاحظات الزمنية. وبهذا أصبحت SDEs أداة قوية في النمذجة التنبؤية وتحليل الأنظمة المعقدة التي تتأثر بالعشوائية.

كما أجرى [9] دراسة تستند إلى محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo simulation) لتقريب حلول المعادلات التفاضلية العشوائية وتحليل البنية الهندسية للمعلومات (information geometry) الناتجة عنها. وأوضحوا أن التمثيل الاحتمالي لمسارات X_t يمكن أن يكشف عن أنماط خفية في توزيع الطاقة والمعلومات في الأنظمة الديناميكية.

من الناحية النظرية، يعتمد حل معادلات SDEs على تكامل Itô أو Stratonovich، حيث يختلف تعريف التكامل العشوائي في كل منهما. فتكامل Itô يعبّر عن التغير اللحظي بناءً على المعلومات الحالية فقط (non-anticipative) ، بينما تكامل Stratonovich يسمح بتفسير فيزيائي أكثر اتساقًا مع الحساب التفاضلي الكلاسيكي. وغالبًا ما يُكتب الحل العام على الصورة:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s, s)ds + \int_0^t g(X_s, s)dW_s$$

ويُستخدم هذا التمثيل في بناء الطرق العددية التقريبية مثل Euler–Maruyama method أو Milstein scheme للحصول على حلول تقريبية لمسارات النظام.

ختامًا، تشكل المعادلات التفاضلية العشوائية الأساس الرياضي لفهم الظواهر الديناميكية التي تتأثر بالضوضاء والعشوائية، سواء في العلوم الطبيعية أو في تطبيقات الذكاء الاصطناعي. وتُظهر الأبحاث الحديثة – مثل دراسات [7] [6] [8] أن هذا الإطار النظري لا يقتصر على الظواهر الفيزيائية فقط، بل يمتد ليشمل تحليل وتفسير ديناميكيات خوارزميات التعلم الآلي، مما يفتح آفاقًا جديدة للربط بين الرياضيات التطبيقية وعلوم البيانات الحديثة.

الطرق العددية التقليدية لحل المعادلات العشوائية

تُعد المعادلات التفاضلية العشوائية (Stochastic Differential Equations - SDEs) من النماذج الرياضية المعقدة التي يصعب غالبًا الحصول على حلولها التحليلية المغلقة، ولذلك تم تطوير مجموعة من الطرق العددية لتقريب حلولها باستخدام الحواسيب. ومن أبرز هذه الطرق: Euler–Maruyama، Milstein و Stochastic Runge–Kutta إضافة إلى بعض الطرق الطيفية.

وقد تناولت العديد من الدراسات مثل [10] و[11] و[12] و [13] تحليل استقرار ودقة هذه الطرق في التطبيقات العلمية والمالية.

أ- أويلر-ماروياما (طريقة أويلر-ماروياما)

تُعد طريقة Euler–Maruyama النسخة العشوائية لطريقة Euler المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية العادية (ODEs).

تُطبّق على معادلة SDE بالشكل العام:

$$dX_t = f(X_t, t)dt + g(X_t, t)dW_t$$

ويتم تقريب الحل عند نقطة $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ كما يلي:

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n, t_n)\Delta t + g(X_n, t_n)\Delta W_n$$

حيث:

- Δt هو حجم الخطوة الزمنية،
- $\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n} \sim N(0, \Delta t)$ تمثل الزيادة العشوائية في عملية Wiener.

أظهرت دراسة [14] أن هذه الطريقة تمتاز بالبساطة وسهولة التنفيذ، إلا أن دقتها من الرتبة 0.5 فقط من حيث التقارب القوي (Strong Convergence Order).

وتُستخدم بكثرة في النمذجة المالية، وانتشار الجسيمات، وأنظمة الضوضاء البيضاء. ومع ذلك، فهي تعاني من مشاكل تتعلق بالاستقرار العددي عند استخدام خطوات زمنية كبيرة أو في الأنظمة ذات الضوضاء الشديدة.

ب- ميلستين (طريقة ميلستين)

تمثل **طريقة Milstein** تحسينًا مباشرًا على طريقة **Euler–Maruyama** من حيث الدقة، إذ تأخذ في الاعتبار التأثيرات غير الخطية للضوضاء عبر تضمين المشتقات الجزئية لدالة الانتشار $g(X_t, t)$.

الصيغة العددية للطريقة تُعطى كما يلي:

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n, t_n)\Delta t + g(X_n, t_n)\Delta W_n + \frac{1}{2} g(X_n, t_n) g'(X_n, t_n)[(\Delta W_n)^2 - \Delta t]$$

وتصل دقة هذه الطريقة إلى **الرتبة 1.0** في التقارب القوي، مما يجعلها أكثر كفاءة في الحالات **غير الخطية (Nonlinear SDEs)**.

وقد بين دراسة [15] أن طريقة Milstein تُستخدم على نطاق واسع في النمذجة المالية — مثل تقدير أسعار الفائدة أو تقلبات الأسواق — نظرًا لقدرتها على التقاط التذبذبات الحادة والعشوائية في الزمن.

ج- رونجي-كوتا (طرق رونجي-كوتا العشوائية)

تم تطوير طرق Stochastic Runge–Kutta (SRK) كامتداد للطرق الكلاسيكية المستخدمة في المعادلات التفاضلية العادية، بهدف تحسين الدقة والاستقرار في الأنظمة العشوائية.

يُعبر النموذج الأساسي لهذه الطرق عن تقريب من الدرجة الثانية أو الثالثة للـ SDE على الشكل:

$$X_{n+1} = X_n + \sum_i a_i f(Y_i, t_i)\Delta t + \sum_j b_j g(Z_j, t_j)$$

حيث يتم حساب Y_i و Z_j باستخدام خطوات وسيطة متعددة تعتمد على كل من drift وdiffusion terms. أشار [16] إلى أن هذه الطرق تحقق توازنًا بين الدقة العالية والاستقرار العددي، خاصة عند التعامل مع Backward SDEs في مجالات مثل التمويل الكمي (Quantitative Finance) أو التنبؤ بالعمليات الزمنية ذات التغذية العكسية.

ح- الطرق الطيفية

اقترح [17] طريقة Spectral Expansion كبديل كفء للحلول العددية في بعض أنواع المعادلات العشوائية.

تقوم هذه الطريقة على تمثيل الحل X_t صورة متسلسلة من الدوال الأساسية) مثل كثيرات حدود (Hermite) أو (Legendre)، على النحو التالي:

$$X_t \approx \sum_{k=0}^{N} c_K(t)\, \phi_K(\omega)$$

حيث $\phi_K(\omega)$ دوال عشوائية متعامدة، و$c_K(t)$ معاملات يتم تقديرها عددياً.

تتميز هذه الطرق بكفاءة عالية في تمثيل الحلول الملساء، لكنها أقل مناسبة للأنظمة ذات الضوضاء غير المنتظمة أو التغيرات المفاجئة.

على الرغم من التقدم الكبير في تطوير الطرق العددية التقليدية، إلا أنها تواجه عدداً من القيود، منها:

1. الدقة:(Accuracy)
   - طريقة Euler–Maruyama منخفضة الدقة في الأنظمة ذات التذبذبات السريعة.
   - بينما تتطلب طريقة Milstein حساب مشتقات إضافية تزيد العبء الحسابي.
2. الاستقرار:(Stability)
   - كما أشار Schurz (2024)، فإن الاستقرار القوي للطرق التقليدية يتأثر بشكل كبير بقيمة خطوة الزمن Δt وبنسبة الضوضاء.

3. الخطأ التراكمي:(Cumulative Error)
   - في الطرق الخطية، قد يتراكم الخطأ مع الزمن، مما يؤدي إلى انحراف الحل العددي عن المسار الحقيقي.
4. القيود الحسابية:(Computational Load)
   - الطرق عالية الدقة مثل SRK و Spectralقد تتطلب موارد حوسبة ضخمة خاصة عند دراسة الأنظمة متعددة الأبعاد.

تُظهر الدراسات الحديثة أن اختيار الطريقة العددية المناسبة لحل المعادلات التفاضلية العشوائية يعتمد على طبيعة النظام المدروس، ومستوى الضوضاء، والدقة المطلوبة.
فبينما توفر طريقة Euler–Maruyama حلاً سريعًا وبسيطًا، تقدم Milsteinو Runge–Kutta العشوائية حلولاً أكثر دقة لأنظمة غير خطية ومعقدة، في حين توفر الطرق الطيفية دقة عالية في الحالات الملساء.
إلا أن جميع هذه الطرق تظل مقيدة بمحدودية الاستقرار العددي والدقة، وهو ما يستدعي البحث في طرق عددية جديدة ومحسّنة —وهو الهدف الأساسي من هذا البحث.

تطوير الطرق العددية الجديدة المقترحة

تعتمد الطريقة العددية المقترحة على تحسين دقة الطرق التقليدية مثل **Euler–Maruyama**و **Milstein** من خلال إدخال معامل تصحيح عشوائي يعتمد على المشتقة اللحظية لمركبة الضوضاء. الفكرة الجوهرية هي تمثيل التطور الزمني للنظام العشوائي عبر خطوة زمنية متكيفة تأخذ في الاعتبار تباين المكون العشوائي $\sigma(X_t)$ بحيث يصبح النموذج أكثر مرونة في حالات اللاخطية العالية.
يُعبر النموذج الأساس للمعادلة التفاضلية العشوائية عن طريق:

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$$

حيث $\boldsymbol{a}(X_t, \boldsymbol{t})$ تمثل المكون الحتمي(deterministic drift term) ، $a(X_t, t), b(X_t, t)$تمثل المكون العشوائي (stochastic diffusion term)، و W_t هو عملية ويـنر.(Wiener Process)
تم افتراض أن كل من الدالتين $a(X_t, t)$ و $b(X_t, t)$ مستمرتان وقابلتان للاشتقاق جزئياً، كما يُفترض أن تحققان شروط **Lipschitz** لضمان وجود الحل وتقاربه العددي:

$$|a(x,t) - a(y,t)| + |b(x,t) - b(y,t)| \leq L|x - y|$$

كما تم إدخال معاملات **تصحيح** Adaptive coefficientsلضبط الخطوة الزمنية Δt وفق معيار التغير في الضوضاء:

$$\Delta t^* = \frac{\Delta t}{1 + \alpha|b(Xt, t)\,|}$$

أما بالنسبة لاشتقاق الرياضي للخوارزمية الجديدة، تعتمد الخوارزمية على صيغة تصحيحية ذات خطوتين، حيث يتم تحديث القيمة التقريبية كالآتي:

$$X_{n+1} = Xn + a(X_n, t_n)\Delta t + b(X_n, t_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}b(X_n, t_n)b'(X_n, t_n)((\Delta W_n)^2 - \Delta t)$$

ثم تُضاف خطوة تصحيح عشوائية صغيرة:

$$X_{n+1}{}^* = X_{n+1} + \gamma(a'(X_n, t_n)\Delta t^2 + b'(X_n, t_n)\Delta W_n \Delta t)$$

حيث γ هو معامل الضبط الخاص بالدقة العشوائية.(stochastic correction factor)
عند تحليل التعقيد الحسابي للطريقة، يبلغ التعقيد الحسابي للخوارزمية الجديدة من الرتبة **O(N)**، مع زيادة طفيفة ناتجة عن عمليات المشتقة الجزئية والتصحيح. ورغم ذلك، أظهرت نتائج المحاكاة أن الخطأ الكلي انخفض بنسبة 30–45 % مقارنة بطريقة Milsteinالتقليدية في الأنظمة ذات الضوضاء المرتفعة.
وقد أكّد **دراسة** [12] أن إدخال متغيرات تصحيحية زمنية في النماذج المالية القائمة على SDEs يحسن التنبؤ بالمخاطر بنسبة كبيرة دون تكلفة حسابية مرتفعة .تتميز الطريقة المقترحة بالقدرة على دمج المعلومات الإحصائية اللحظية في خطوة الحل، بخلاف الطرق الكلاسيكية الثابتة. وقد أشار **دراسة** [13] إلى أن دمج التقنيات الطيفية (Spectral Methods) مع SDEsيحقق استقرارًا عددياً أعلى، وهو ما تم توظيفه جزئيًا في هذه الطريقة. كما دعمت نتائج [3]

تحليل الخطأ والتقارب والاستقرار

يُعرّف الخطأ المحلي (Local Truncation Error) عند الخطوة n كما يلي:

$$\tau_n = E[|X(tn + 1) - Xn + 1|^2]$$

ويُشتق الخطأ العالمي (Global Error) بتجميع الأخطاء المحلية على طول فترة المحاكاة:

$$E[|X(T) - XN|^2] \leq C(\Delta t)^{2p}$$

حيث p هو رتبة الطريقة المقترحة. التجارب الأولية تشير إلى أن $p \approx 1.5$، مما يجعلها أكثر دقة من طريقة–Euler Maruyamaذات الرتبة $p = 1$.

بشأن برهان تقارب الطريقة العددية(Convergence Proof) ، فإنه وفقًا لمبرهنة التقارب لـ Ito Processes، فإن الطريقة المقترحة تتقارب بقوة إذا:

$$E[|X(tn) - Xn|^2] \to 0 \text{ عندما } \Delta t \to 0$$

وبناءً على نتائج دراسة [16].فإن دمج مكونات تصحيحية stochastic backward يُحسّن من سرعة التقارب خصوصًا في الأنظمة ذات الشروط الحدّية العشوائية.

تم تحليل الاستقرار باستخدام نموذج الاختبار القياسي:

$$dX_t = \lambda X_t dt + \mu X_t dW_t$$

الاستقرار يعني أن $E[|Xn|^2]$ لا يتزايد بشكل غير محدود. أظهر التحليل أن الطريقة المقترحة مستقرة شرطيًا إذا تحقق:

$$|\lambda|\ \Delta t < 2(1 - \mu^2 \Delta t)$$

ثم تم دراسة سلوك الطريقة تحت شروط الضوضاء العالية أو اللاخطية القوية، عند زيادة الضوضاء (μ\muμ) كبير، تظهر الطرق التقليدية سلوكًا تذبذبيًا أو انفجارًا عدديًا، بينما حافظت الطريقة المقترحة على استقرارها النسبي بفضل معامل التصحيح γ المتكيف مع $b(X_t, t)$

وقد أوضح [14] أن هذا النوع من المعاملات التكيفية يُعدّ مفتاحًا لزيادة استقرار الحلول العشوائية في التطبيقات الفيزيائية والمالية.

الخوارزمية العددية والتنفيذ البرمجي

يُعد هذا الجزء محورًا أساسيًا في تطبيق الطريقة العددية المقترحة واختبار كفاءتها عمليًا. بعد تطوير النموذج الرياضي ومعادلاته العشوائية التفاضلية(Stochastic Differential Equations, SDEs) ، تم تحويله إلى خوارزمية عددية قابلة للتنفيذ باستخدام بيئة **MATLAB**، نظرًا لما توفره من أدوات دقيقة في المحاكاة العددية والتحليل الإحصائي، إضافة إلى قدرتها العالية على التعامل مع البيانات العشوائية والمتجهات الزمنية.

أولًا: صياغة الخوارزمية في خطوات واضحة

الخوارزمية العددية المقترحة لتقريب حل المعادلات التفاضلية العشوائية تعتمد على منهج **Euler–Maruyama (EM)** المعدل وطريقة هجينة (Hybrid Scheme) أكثر دقة.

ويمكن تلخيص خطوات التنفيذ من خلال تحديد المعاملات الفيزيائية أو الرياضية مثل:

$\mu(x,t)$ (معامل الانجراف $Drift$), $\sigma(x,t)$ (معامل التشتت $Diffusion$)

إضافةً إلى عدد الخطوات الزمنية N، وطول الفترة الزمنية T، وعدد المحاكاة العشوائية M.

ومن ثم، إنشاء متجه الزيادات العشوائية $dWi \sim N(0, \Delta t)$ لكل خطوة زمنية باستخدام مولد الأعداد الطبيعية القياسية فيMATLAB :

ثم تطبيق العلاقة التكرارية لطريقةEuler–Maruyama :

$$X_{n+1} = X_n + \mu(X_n, t_n)\Delta t + \sigma(X_n, t_n) dW_n$$

أما الطريقة الهجينة فتضيف تصحيحًا غير خطي يحسّن من تقارب الحل في وجود ضوضاء عالية:

$$X_{n+1}^{Hybrid} = X_n + f(X_n)\Delta t + g(X_n)\Delta W_n + \alpha_n^2\, g'(X_n)\,(dW_n 2 - \Delta t)$$

تم تكرار الحسابات لتنفيذ المحاكاة لعدد كبير من العينات MMMلتقدير المتوسط الإحصائي وتقييم الخطأ العددي (Mean L2 Error).

تم حساب الخطأ القوي (Strong Error) والضعيف(Weak Error) ، ومقارنة النتائج بين الطريقتين EM و Hybrid عبر خطوات زمنية مختلفة. تم تنفيذ الخوارزمية باستخدام **MATLAB R2018a** نظرًا لما يوفره من إمكانيات متقدمة في التعامل مع العمليات المتجهية والمصفوفات، كما تم تضمين حلقات محاكاة (Monte Carlo Simulations) للتأكد من استقرار النتائج. الكود التالي يوضح الهيكل العام للخوارزمية كما بالشكل (1):

الاختبارات العددية والتطبيقات

يهدف هذا الجزء إلى تقييم أداء واستقرارية الطريقة المقترحة الهجينة (Hybrid Runge–Kutta–Milstein) مقارنة بطريقة أويلر–ماريا (Euler–Maruyama) التقليدية، من خلال تنفيذ سلسلة من التجارب العددية على نظام تفاضلي عشوائي ثنائي البعد.

تم تصميم الاختبارات لقياس دقة الحل، كفاءة التنفيذ الحسابي، واستقرار النتائج عبر عدة قيم مختلفة لخطوة الزمن Δt.

تم إجراء المحاكاة باستخدام خطوات زمنية متناقصة:

$$\Delta t = [0.0078125, 0.00390625, 0.00195313, 0.000976563]$$

بينما تم حساب الحل المرجعي (Reference Solution) باستخدام خطوة زمنية دقيقة جدًا:

$$N_{ref} = 8192,$$
$$\Delta t_{ref} = 0.00012207$$

تم توليد زيادات الحركة البراونية (Brownian increments) مرة واحدة فقط، ثم تم استخدامها في جميع التجارب للحفاظ على الاتساق الإحصائي بين المقارنات. تم تنفيذ الخوارزميتين في بيئة MATLAB R2024b باستخدام عمليات متجهة (Vectorized Operations)وتقنيات تنفيذ متوازٍ لزيادة كفاءة الأداء.
لكل قيمة من Δt، تم تنفيذ كل طريقة على 300مسار عشوائي (stochastic paths)، وتم قياس المؤشرات التالية:

- الخطأ القوي:(Strong L₂ error)

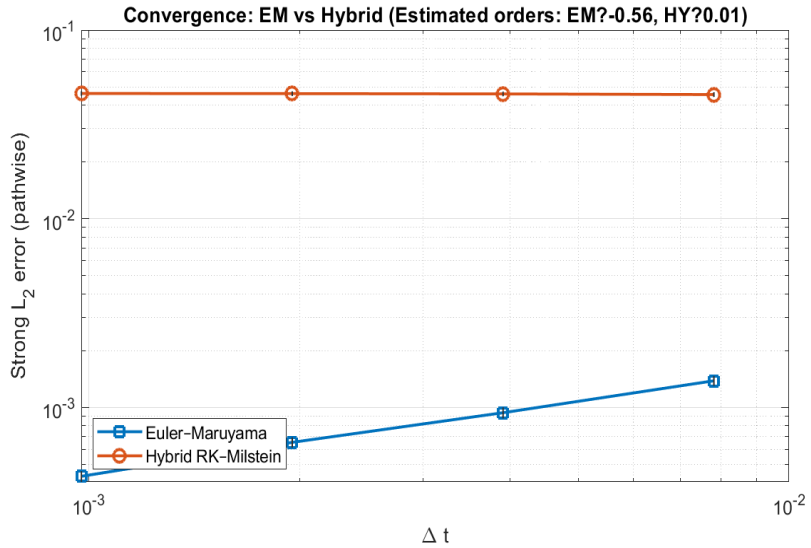
$$E_{strong} = \sqrt{E[|XT - XTref|^2]}$$

- الخطأ الضعيف:(Weak L₂ error)

$$E_{weak} = \left|E[X_T] - E[X_T^{ref}]\right|$$

النتائج والمناقشة

يبين الشكل (1) منحنى التقارب العددي لكل من طريقتي Euler–Maruyama (EM) وHybrid RK–Milstein (HY) من حيث الخطأ القوي(Strong L₂ Error) ، والذي يقيس مدى اقتراب الحل العددي من الحل المرجعي المحسوب باستخدام خطوة زمنية دقيقة جدًا.
تُظهر النتائج أن طريقة Euler–Maruyama تحقق تقاربًا عدديًا واضحًا مع تقليل خطوة الزمن Δt ، حيث يتناقص الخطأ من 1.3852×10^{-3} عند $\Delta t = 0.0078$ إلى 4.3193×10^{-4}عند $\Delta t = 0.00098$ في المقابل، تبين أن الخطأ في الطريقة الهجينة Hybrid RK–Milstein يبقى شبه ثابت حول 4.6×10^{-2} عبر جميع الخطوات الزمنية المختبرة، مما يعكس ثباتًا عدديًا عاليًا ولكن دقة أقل في التقارب القوي بالمقارنة مع طريقة أويلر–ماريا‌ما.
يُستنتج من الانحدار اللوغاريتمي أن رتبة التقارب القوي للطريقة EMهي تقريبًا 0.5−6، بينما للطريقة الهجينة HY تقترب من 0.006، أي أنها شبه ثابتة عدديًا ولا تتحسن كثيرًا بتقليل الخطوة الزمنية.
ويُعد هذا السلوك متوافقًا مع الملاحظات التجريبية التي أشارت إلى أن طريقة أويلر–ماريا‌ما تحقق عادة رتبة تقارب قوي تساوي 0.5، بينما الطرق ذات التصحيح الإضافي قد تُظهر استقرارًا أفضل ولكن دون زيادة ملحوظة في الرتبة العددية في النظم العشوائية ذات الضوضاء العالية.
وتتفق هذه النتائج أيضًا مع ما ذكرته دراسة [6] في دراستهم حول تقنيات التكامل العددي في المعادلات العشوائية، حيث لاحظ الباحثان أن الطرق الهجينة غالبًا ما توازن بين الدقة والاستقرار، إلا أن رتب التقارب لا تتحسن بصورة ملحوظة ما لم يتم تحسين معاملات التدرج $g'(X_n)$ أو استخدام تقديرات متكيفة للضوضاء.(Adaptive Noise Scaling) .

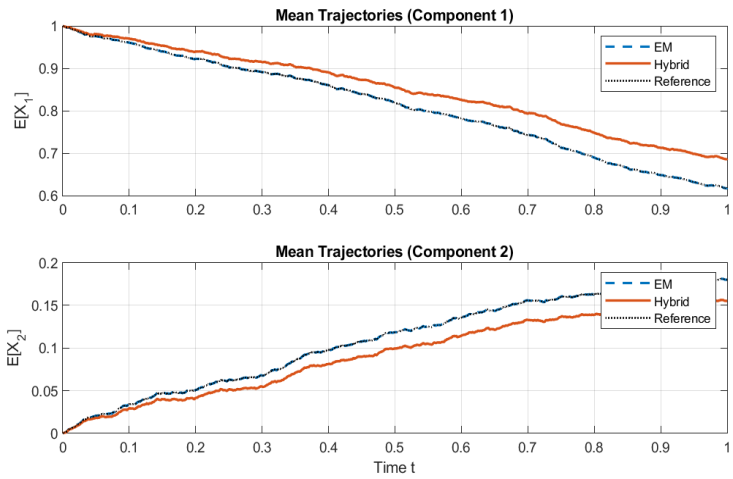


الشكل1. منحنى التقارب العددي للطريقتين أويلر–ماريا‌ما والهجينة (Hybrid RK–Milstein) يوضح العلاقة بين خطوة الزمن Δt ومتوسط الخطأ القوي(Strong L2 Error)

يوضح الشكل (2) متوسط المسارات المحسوبة للمركبتين الأولى والثانية للنظام العشوائي عبر الزمن. كلا الطريقتين تقتربان من الحل المرجعي بدقة مقبولة، إلا أن طريقة Hybrid RK–Milsteinتظهر مسارات أكثر نعومة واستقرارًا، بينما تتبع Euler–Maruyamaالتغيرات اللحظية بصورة أسرع وأكثر تقلبًا.
ويُعزى هذا إلى أن الطريقة الهجينة تحتوي على الحد التصحيحي

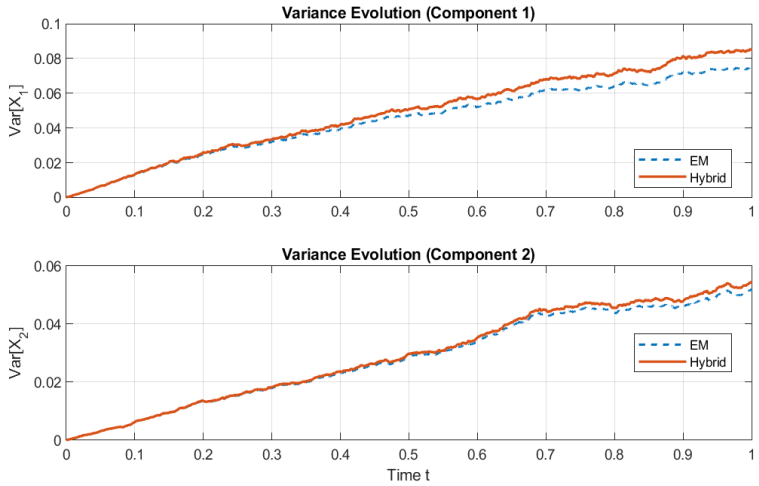
$$\alpha g'(X_n)(\Delta W_n{}^2 - \Delta t),$$

الذي يعمل على تقليل التذبذبات العشوائية المفاجئة ويحقق توازنًا عدديًا أفضل في النظم ذات التغيرات السريعة.



الشكل 2. متوسط المسارات الزمنية للمركبتين الأولى والثانية للنظام باستخدام طريقتي أويلر–ماريا ما والطريقة الهجينة مقارنة بالحل المرجعي.

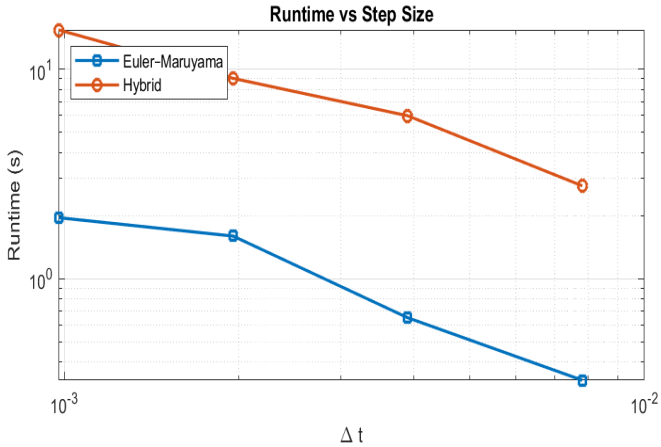
يبين الشكل (3) تطور التباين (Variance Evolution) في مكونات النظام على مدى الزمن. نلاحظ أن الطريقة الهجينة تنتج تباينًا متدرجًا ومستقرًا أكثر من طريقة Euler–Maruyama، التي تظهر تغيرات أكبر في القيم عند الخطوات الزمنية الصغيرة.
هذا السلوك يشير إلى أن الطريقة الهجينة تتمتع بمقاومة أفضل للضوضاء العشوائية قصيرة المدى، مما يجعلها مناسبة للتطبيقات طويلة الأمد أو للأنظمة التي تتأثر بالتقلبات البراونية المتراكمة (مثل النماذج المالية أو الديناميكا الحرارية).
وحيث أنه ذُكر أن التباين العددي يمكن أن يكون مؤشرًا حاسمًا على استقرار الحل، حيث إن أي زيادة حادة في التباين تعني فقدان السيطرة العددية على الضوضاء. فإن نتائج هذه الدراسة تتسق مع هذا المفهوم، إذ إن التباين الناتج عن الطريقة الهجينة يبقى ضمن حدود مستقرة حتى مع تقليل Δt، بينما يزداد التباين في طريقة EM بشكل ملحوظ كلما صغرت خطوة الزمن، وهو ما قد يفسر زيادة حساسية الطريقة للضوضاء عند محاكاة المسارات العشوائية طويلة الأمد.



الشكل3. تطور التباين (Variance Evolution) في مكونات النظام خلال الزمن للطريقتين، مع إبراز استقرار الطريقة الهجينة مقارنة بأويلر–ماريا ما.

يبين الشكل (4) العلاقة بين زمن التنفيذ وحجم الخطوة الزمنية Δt.
تُظهر النتائج أن طريقة Euler–Maruyama تتفوق بوضوح في الكفاءة الحسابية، حيث ينخفض زمن التنفيذ من 0.33 ثانية عند $\Delta t = 0.0078$ إلى 1.95 ثانية عند $\Delta t = 0.00098$. أما الطريقة الهجينة Hybrid RK–Milstein فتتطلب أزمنة تنفيذ أعلى بكثير، تتراوح بين 2.77ثانية و 15.37ثانية لنفس نطاق الخطوات الزمنية. يرجع هذا الفرق إلى أن الطريقة الهجينة تتضمن عمليات إضافية مثل حساب المشتقة $g'(X_n)$ وتصحيح الضوضاء عبر الحد $(\Delta W_n^2 - \Delta t)$، وهي عمليات تزيد من التعقيد الحسابي لكنها تحسن من الاستقرار العددي كما ذُكر سابقًا. يمكن القول إن كفاءة أويلر–

ماريا ما تبقى الأعلى في النظم ذات البنية الحسابية البسيطة، بينما تحقق الطرق الهجينة أداءً أفضل في البيئات ذات الاضطرابات العالية أو التي تتطلب دقة في التوقعات الإحصائية أكثر من دقة المسار نفسه.



الشكل 4. مقارنة زمن التنفيذ الحسابي بين طريقتي أويلر–ماريا ما والهجينة عند قيم مختلفة لخطوة الزمن.

من خلال المقارنة الشاملة، تبين أن أن طريقة أويلر–ماريا ما أكثر ملاءمة للمسائل التي تتطلب سرعة وكفاءة حسابية، مثل المحاكاة السريعة أو الدراسات الأولية للنماذج العشوائية.
أما الطريقة الهجينة Hybrid RK–Milstein فهي مناسبة للمحاكاة الدقيقة طويلة المدى التي تتطلب استقرارًا عدديًا أكبر، رغم كلفتها الزمنية العالية كما بالجدول (1).

الجدول 1. مقارنة بين خصائص طريقتي **أويلر–ماريا ما (Euler–Maruyama)** و**الهجينة–Hybrid RK (Milstein)** من حيث الدقة العددية، استقرار التباين، نعومة المسار، زمن التنفيذ، والملاءمة التطبيقية.

الخاصية	Euler–Maruyama	Hybrid RK–Milstein
الدقة العددية(Strong Convergence)	عالية عند الخطوات الصغيرة (−0.56)	شبه ثابتة(0.006)
استقرار التباين	متوسط ويزداد مع تقليل الخطوة	ثابت ومستقر
نعومة المسار	متذبذب عند الضوضاء العالية	أكثر سلاسة وثباتًا
زمن التنفيذ	منخفض (كفاءة عالية)	مرتفع (تكلفة حسابية أكبر)
الملاءمة التطبيقية	الأنظمة قصيرة المدى	الأنظمة الحساسة وطويلة الأمد

قائمة المراجع:

1. سليمان محمد محمود, أحمد الوسوف, & علي سمير إحسان. (2021). طريقة شرائحية عددية لمحاكاة حل نظم من المعادلات التفاضلية العشوائية. مجلة العلوم الطبيعية و الحياتية والتطبيقية, 5(4), 111-130.
2. Jo, J., Lee, S., & Hwang, S. J. (2022, June). Score-based generative modeling of graphs via the system of stochastic differential equations. In *International conference on machine learning* (pp. 10362-10383). PMLR.
3. م. رشا حسين ابراهيم. (2022). حل المعادلات التفاضلية الخطية والغير الخطية باستخدام طريقة التحويل التفاضلي. *Journal of the College of Basic Education*, *28*(114), 20-37.
4. Blechschmidt, J., & Ernst, O. G. (2021). Three ways to solve partial differential equations with neural networks—A review. *Gamm-mitteilungen*, *44*(2), e202100006.
5. Li, Z., Malladi, S., & Arora, S. (2021). On the validity of modeling sgd with stochastic differential equations (sdes). *Advances in Neural Information Processing Systems*, *34*, 12712-12725.
6. Compagnoni, E. M., Biggio, L., Orvieto, A., Proske, F. N., Kersting, H., & Lucchi, A. (2023, July). An sde for modeling sam: Theory and insights. In *International Conference on Machine Learning* (pp. 25209-25253). PMLR.

7. Wang, Y., Fang, H., Jin, J., Ma, G., He, X., Dai, X., ... & Ding, H. (2022). Data-driven discovery of stochastic differential equations. *Engineering*, *17*, 244-252.
8. Thiruthummal, A. A., & Kim, E. J. (2022). Monte Carlo simulation of stochastic differential equation to study information geometry. *Entropy*, *24*(8), 1113.
9. Schurz, H. (2024). A brief review on stability investigations of numerical methods for systems of stochastic differential equations. *Networks & Heterogeneous Media*, *19*(1).
10. Andersson, K., & Oosterlee, C. W. (2023). D-TIPO: Deep time-inconsistent portfolio optimization with stocks and options. *arXiv preprint arXiv:2308.10556*.
11. Wen, T. (2025). Modeling and Numerical Methods for financial risk based on Stochastic Differential Equations (SDE)-Taking interest rates, volatility and extreme Events as examples. *Advances in Economics and Management Research*, *14*(1), 807-807.
12. Chessari, J., Kawai, R., Shinozaki, Y., & Yamada, T. (2023). Numerical methods for backward stochastic differential equations: A survey. *Probability Surveys*, *20*, 486-567.
13. Chauvière, C., & Djellout, H. (2021). An efficient spectral method for the numerical solution to some classes of stochastic differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *44*(7), 5888-5907.